

Bereich: Folgen und Reihen

Aufgabe 1: Jäger und Hund

Ein Jäger läuft mit der konstanten geradlinigen Geschwindigkeit v_1 von A nach B.

Die Länge der Strecke von A nach B ist s_0 .

Begleitet wird er von seinem Hund, der sich mit der konstanten geradlinigen Geschwindigkeit $v_2 > v_1$ bewegt.

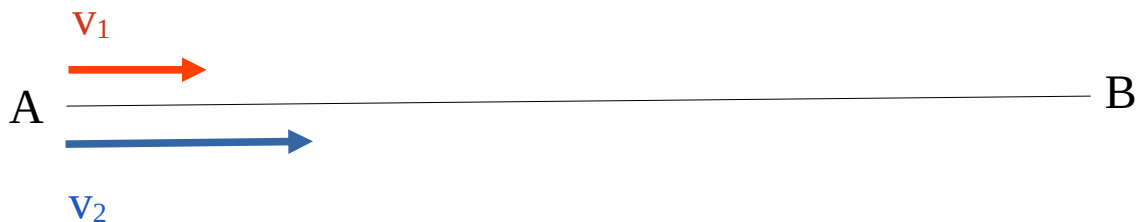
Da sich der Hund schneller als der Jäger bewegt, ist er früher am Ziel B als der Jäger.

Am Ziel B angekommen, läuft der Hund wieder zurück zum Jäger. Wieder bei ihm angekommen, bewegt er sich wieder in Richtung B. Dort angekommen, läuft der Hund wieder zurück zum Jäger, usw. Das wiederholt sich so lange, bis der Jäger bei B angekommen ist.

Frage:

Bestimmen Sie die Länge der Strecke, die der Hund insgesamt gelaufen ist.

Geben Sie 2 Lösungen an.



Aufgabe 2: unendliche Summenbildung geometrisch gelöst

Berechne:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots$$

Tipp:

Zerlege dazu ein Quadrat der Länge 1 in 2 Hälften.

Zerlege dann eine Hälfte davon wieder in 2 Hälften.

Zerlege dann eine Hälfte davon wieder in 2 Hälften, usw.

Lösungen:

Aufgabe 1:

1. Lösung:

1.1) Zeit, die der Hund von A nach B benötigt:

$$t_0 = \frac{s_0}{v_2}$$

1.2) Strecke, die der Jäger während der Zeit t_1 läuft:

$$x_0 = v_1 \cdot \frac{s_0}{v_2} = \frac{v_1}{v_2} \cdot s_0$$

1.3) Zeit, bis sich Hund und Jäger wieder treffen:

$$t_1 = \frac{\left(s_0 - \frac{v_1}{v_2} \cdot s_0\right)}{(v_1 + v_2)} = \frac{(v_2 - v_1) s_0}{(v_1 + v_2) v_2}$$

1.4) Strecke, die der Hund von B bis zum Treffpunkt mit dem Jäger gelaufen ist:

$$y_1 = \frac{(v_2 - v_1) s_0}{(v_1 + v_2) v_2} \cdot v_2 = \left(\frac{v_2 - v_1}{v_1 + v_2}\right) \cdot s_0$$

1.5) Gesamtstrecke, die der Hund bis zum 1. Treffpunkt mit dem Jäger gelaufen ist:

$$s_1 = \left(\frac{v_2 - v_1}{v_1 + v_2}\right) \cdot s_0 + s_0 \quad \text{Definiere: } q := \frac{v_2 - v_1}{v_1 + v_2}$$
$$s_1 = q \cdot s_0 + s_0$$

1.6) Strecke, die der Hund vom 1. bis zum 2. Treffpunkt gelaufen ist:

$$s_2 = q^2 \cdot s_0 + q \cdot s_0$$

1.7) Strecke, die der Hund vom 2. bis zum 3. Treffpunkt gelaufen ist:

$$s_3 = q^3 \cdot s_0 + q^2 \cdot s_0$$

...

1.8) Strecke, die der Hund vom (n-1). bis zum n. Treffpunkt gelaufen ist:

$$s_n = q^n \cdot s_0 + q^{(n-1)} \cdot s_0$$

1.9) Gesamtstrecke, die der Hund bis zum n. Treffpunkt gelaufen ist:

$$S_n = s_0 + 2q s_0 + 2q^2 s_0 + 2q^3 s_0 + \dots + 2q^{(n-1)} s_0 + q^n s_0, \text{ also:}$$
$$S_n = 2s_0 + 2q s_0 + 2q^2 s_0 + 2q^3 s_0 + \dots + 2q^{(n-1)} s_0 + 2q^n s_0 - (s_0 + q^n s_0), \text{ also:}$$
$$S_n = 2(s_0 + 2q s_0 + q^2 s_0 + q^3 s_0 + \dots + q^{(n-1)} s_0 + q^n s_0) - (s_0 + q^n s_0)$$

1.10) Gesamtstrecke, die der Hund gelaufen ist:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} 2(s_0 + 2q s_0 + q^2 s_0 + q^3 s_0 + \dots + q^{(n-1)} s_0 + q^n s_0) - (s_0 + q^n s_0), \text{ also:}$$
$$S = 2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (s_0 + 2q s_0 + q^2 s_0 + q^3 s_0 + \dots + q^{(n-1)} s_0 + q^n s_0) - \lim_{n \rightarrow \infty} (s_0 + q^n s_0), \text{ also:}$$
$$S = \frac{2 \cdot s_0}{1 - q} - s_0, \text{ also:}$$

$$S = \frac{2 \cdot s_0}{1 - \frac{v_2 - v_1}{v_1 + v_2}} - s_0 = \frac{2 s_0}{\frac{2 v_1}{v_1 + v_2}} - s_0 = \frac{s_0}{v_1} \cdot (v_1 + v_2) - s_0 = s_0 \cdot \frac{v_2}{v_1} \quad , \text{ also:}$$

$$S = s_0 \cdot \frac{v_2}{v_1}$$

2. Lösung:

2.1) Die Zeit, bis der Jäger im Ziel B ankommt (=Zeit bis der Hund am Ziel B ankommt):

$$t = \frac{s_0}{v_1}$$

2.2) Strecke, die der Hund insgesamt gelaufen ist:

$$S = v_2 \frac{s_0}{v_1} = s_0 \frac{v_2}{v_1}$$

Aufgabe 2:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots = 1$$