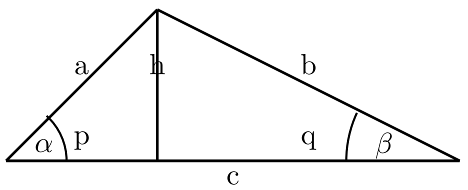
1 Aufgabe (nicht leicht)

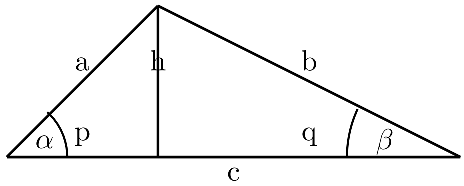
Aufgabe: Berechnen Sie Fläche A(a,b,c) eines Dreiecks in Abhängigkeit von den 3 Seitenlängen $a > 0, b > 0, c > 0$.
Geben Sie eine Formel für A(a,b,c) an, in der nur a,b,c vorkommt.

Tipp:
Verwenden des Kosinusssatz, Höhensatz ($h^2 = p \cdot q$ und $(\sin(\alpha))^2 + (\cos(\alpha))^2 = 1$



2 Lösung

2.1 Lösung 1



Nach dem Kosinussatz gilt:
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\sin(\beta)$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\sin(\alpha)$
also:
$sin(\beta) = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ (G1)
$sin(\alpha) = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$ (G2)
Es gilt:
$\sin(\alpha)^2 + \cos(\alpha)^2 = 1$
also:
$\cos(\alpha) = \sqrt{1 - sin(\alpha)^2}$ (G3)
$\sin(\beta)^2 + \cos(\beta)^2 = 1$
also:
$\cos(\beta) = \sqrt{1 - sin(\beta)^2}$ (G4)
Es gilt:
$\frac{p}{a} = \cos(\alpha)$ also:
$p = a\cos(\alpha)$ und mit (G3) $p = a\sqrt{1 - sin(\alpha)^2}$
$\frac{q}{b} = \cos(\beta)$ also:
$q = b\cos(\beta)$ und mit (G4) $q = b\sqrt{1 - sin(\beta)^2}$
(G1) und (G2) eingesetzt ergibt dann:
$p = a\sqrt{1 - (\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac})^2}$
$q = b\sqrt{1 - (\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc})^2}$ Nach dem Höhesatz gilt:
$h^2 = pg$ also: $h = \sqrt{pq}$ und damit:
$h = \sqrt{a\sqrt{1 - (\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac})^2}b\sqrt{1 - (\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc})^2}} = \sqrt{ab\sqrt{1 - (\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac})^2}\sqrt{1 - (\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc})^2}}$
Da für die Fläche A gilt:
$A = h \cdot \frac{c}{2}$, folgt:
$A = \sqrt{ab\sqrt{1 - (\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac})^2}\sqrt{1 - (\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc})^2}} \cdot \frac{c}{2}$

2.2 Lösung 2

Es gelten die folgenden 3 Gleichungen für die 3 Unbekannten p,q,h:
$h^2 + p^2 = a^2$
$h^2 + q^2 = b^2$
$c = p + q$
Daraus folgt dann:
$h^2 = a^2 - p^2$
$h^2 = b^2 - q^2$
also:
$a^2 - p^2 = b^2 - q^2$
$p = c - q$
also:
$a^2 - (c - q)^2 = b^2 - q^2$
$a^2 - c^2 + 2cq - q^2 = b^2 - q^2$
also:
$q = \frac{b^2 - a^2 + c^2}{2c}$
und damit:
$h^2 = b^2 - (\frac{b^2 - a^2 + c^2}{2c})^2$
also:
$h = \sqrt{b^2 - (\frac{b^2 - a^2 + c^2}{2c})^2}$
also:
$A = \sqrt{b^2 - (\frac{b^2 - a^2 + c^2}{2c})^2} \cdot \frac{c}{2}$

3 Beispiele

3.1 Beispiel 1

a=3, b=4, c=5
Dies ist ein rechtwinkliges Dreieck, von dem sofort die Fläche berechnet werden kann:
$A = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$

Nach obiger Formel gilt: (a=3,b=4, c=5)
$A = \sqrt{ab\sqrt{1-(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac})^2}\sqrt{1-(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc})^2}\frac{c}{2}} =$
$\sqrt{3 \cdot 4\sqrt{1-(\frac{3^2+5^2-4^2}{2 \cdot 3 \cdot 5})^2}\sqrt{1-(\frac{4^2+5^2-3^2}{2 \cdot 4 \cdot 5})^2}\frac{5}{2}}$ =6

3.2 Beispiel 2

Für ein gleichseitiges Dreieck mit den 3 Seitenlängen g gilt:
$A = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot g^2$

Nach obiger Formel gilt: (a=b=c=g)
$A = \sqrt{ab\sqrt{1-(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac})^2}\sqrt{1-(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc})^2}\frac{c}{2}} =$
$\sqrt{g^2\sqrt{1-(\frac{g^2+g^2-g^2}{2g^2})^2}\sqrt{1-(\frac{g^2+g^2-g^2}{2g^2})^2}\frac{g}{2}} =$
$\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot g^2$

4 Aufgabe

Nach dem Satz von Heron kann man die Fläche auch nach der folgenden Formel berechnen:
$A = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{(a+b+c) \cdot (-a+b+c) \cdot (a-b+c) \cdot (a+b-c)}$

siehe:
`https://de.wikipedia.org/wiki/Satz_des_Heron`

Zeige, daß folgenden Gleichungen für alle $a > 0, b > 0, c > 0$ äquivalent sind:
$A = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{(a+b+c) \cdot (-a+b+c) \cdot (a-b+c) \cdot (a+b-c)}$
und
$A = \sqrt{ab\sqrt{1-(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac})^2}\sqrt{1-(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc})^2}} \cdot \frac{c}{2}$
und
$A = \sqrt{b^2 - (\frac{b^2-a^2+c^2}{2c})^2} \cdot \frac{c}{2}$