$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ **und** $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

5. Juli 2023

Inhaltsverzeichnis

1 Vorbemerkungen

In vielen Büchern wird versucht die Teilmengenbeziehung $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ und $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ mit Hilfe der sogenannten Identifikation zu begründen.
Hier wird der Versuch gemacht, das formal korrekter zu machen.

1.1 Die Grundidee

Es sei $\{"null", "eins", "zwei", "drei""vier", 5, 6, 7, 8, , ...\}$ eine (ungewohnte) Kodierung der Menge der natürlichen Zahlen.
Angenommen man will die Menge $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ in die Menge $\{"null", "eins", "zwei", "drei", "vier", 5, 6, 7, 8, , ...\}$ einbetten, d.h. zur Teilmenge machen, dann geht das nicht so einfach, weil keine Teilmengenbeziehung vorliegt.
Man kann aber diese (ungewohnt) kodierte Menge der natürlichen Zahlen entsprechend umkodieren d.h. dort die Menge $\{"null", "eins", "zwei", "drei", "vier"\}$ durch $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ ersetzen und bekommt dann die (bekannte Notation der) Menge der natürlichen Zahlen $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ...\}$.
Dann hat man Menge $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ in die (bekannte Notation der) Menge der natürlichen Zahlen $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ...\}$ eingebettet.

1.2 Satz-1

Sei M eine Menge, $\mathbb{G} = (G, +)$ eine Gruppe und $\Phi : G \mapsto M$ eine Bijektion.
Seien $x, y \in M$ und $\oplus$ eine Verknüpfungen auf M, mit:
$x \oplus y = \Phi(\Phi^{-1}(x) + \Phi^{-1}(y))$

Dann ist $\mathbb{M} = (M, \oplus)$ eine Gruppe und Φ ein Isomorphismus.

1.3 Satz-2

Sei M eine Menge, $\mathbb{K} = (K, +, \cdot)$ ein Körper und $\Phi : K \mapsto M$ eine Bijektion.
Seien $x, y \in M$ und $\oplus$ bzw. $\otimes$ Verknüpfungen auf M mit:
$x \oplus y = \Phi(\Phi^{-1}(x) + \Phi^{-1}(y))$
$x \otimes y = \Phi(\Phi^{-1}(x) \cdot \Phi^{-1}(y))$

Dann ist $\mathbb{M} = (M, \oplus, \otimes)$ ein Körper und Φ ein Isomorphismus.

siehe:
http://www.math.uni-konstanz.de/numerik/personen/gubisch/de/teaching/ws1011/exercises01.pdf

1.4 Satz-3

Sei S eine Menge mit n Verknüpfungen $\odot_i$ und S mit
$S = \bigcup\limits_{x \in R} K(x)$
eine Zerlegung in paarweise verschiedene Äquivalenzklassen mit Repräsentanten $x \in R \subset S$
Genau dann definiert
$K(a) \odot_i K(b) = K(a \odot_i b)$ für jedes i mit $1 \leq i \leq n$ mit $a, b \in S$ eine Verknüpfung auf $\{K(x) \mid x \in R\}$
wenn:

die durch die Zerlegung von S induzierte Äquivalenzrelation eine Kongruenzrelation auf S ist.

1.5 Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$

Die bekannte Menge $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$
mit ihren bekannten Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ wird als die Menge der natürlichen Zahlen bezeichnet.

2 Konstruktion von $\mathbb{Z} \supset \mathbb{N}$ aus $\mathbb{N}$

2.1 Um was es geht

Informal:
Beabsichtigt wird, eine (aus der Schule bekannte) ganze Zahl der Form a-b
als ein Paar (a,b) zu formalisieren.
So einfach geht das nicht,denn dann wäre z.B. 3-7 = 4-8, also (3,7) = (4,8).
Diese 2 Paare sind aber verschieden.
Deshalb definiert man eine Äquivalenzrelation auf den Zahlenpaaren, wobei zwei Zahlenpaare äquivalent sind, wenn ihre Differenz gleich ist. Also:
$(a, b) \sim (c, d) \iff a - b = c - d$
Da die Differenz nicht definiert ist, formt man um und erhält die:

Formale Spezifikation:
$(a, b) \sim (c, d) :\iff a + d = c + b$
Eine ganze Zahl a-b wird dann als die Äquivalenzklasse [a,b] := K((a,b)) formalisiert.

2.2 Konstruktion von M

$M := \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

2.2.1 Verknüpfung auf M

Informal:
Beabsichtigt wird die Addition zweier ganzer Zahlen a-b und c-d so durchzuführen:
a-b + c-d = a+c - (b+d)
Da die Differenz nicht definiert ist, formt man um und erhält die:

Formale Spezifikation:
$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$

2.2.2 Äquivalenzrelation auf M

siehe oben:
$(a, b) \sim (c, d) :\iff a + d = b + c$

2.3 Konstruktion von A als Menge der Äquivalenzklassen auf M

2.3.1 A := Menge der Äquivalenzklassen auf M

$A := \{K([x, y]) \mid x, y \in \mathbb{N}\}$

Die folgenden Elemente bilden ein vollständiges Repräsentantensystem der obigen Äquivalenzklasse:
(0,k) , (k,0) mit $k \in \mathbb{N}$, also:
$A = \{K([(0, k)] \mid k \in \mathbb{N}\} \quad \cup \quad \{K([(k, 0)] \mid k \in \mathbb{N}\}$

2.3.2 Verknüpfung auf A

Die Äquivalenzrelation auf M ist eine Kongruenzrelation.
Deshalb ist nach Satz-3 die folgende Verknüpfung auf den Äquivalenzklassen definiert:
$[a, b] + [c, d] := [a + c, b + d]$
D.h. die Verknüpfung + auf M läßt sich auf die Äquivalenzklassen ërweitern".

Bemerkung:
Für die Verknüpfung + in $\mathbb{N}$, M und A werden jeweils die gleichen Zeichen + verwendet.

2.3.3 A ist eine Gruppe

Man kann zeigen, dass A eine Gruppe ist mit:
$[h, h]$ ist Einselement und [b,a] ist das Inverse von $[a, b]$

2.4 Konstruktion von $\mathbb{Z}$ als isomorphes Bild von A

2.4.1 Konstruktion eines Isomorphismus

Informal:
Beabsichtigt wird in A die Menge $T := \{[a + h, h] \mid a \in \mathbb{N} \wedge h \in \mathbb{N}\}$
durch $\mathbb{N}$ zu ersetzen, wobei die sich dann ergebende Menge dann ein isomorphes Bild von A ist.

Formal:
$T := \{[a + h, h] \mid a \in \mathbb{N} \wedge h \in \mathbb{N}\}$
$\mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup (A \setminus T)$
$\Phi : A \to \mathbb{Z}$ mit:
$\Phi([a, b]) := [a, b] \qquad$ falls $[a, b] \in A \setminus T$
$\Phi([a + h, h]) := a \qquad$ sonst
Damit ist Φ eine Bijektion.
Man definiert die Verknüpfung $\oplus$ auf $\mathbb{Z}$:
$a \oplus b := \Phi(\Phi^{-1}(a) + \Phi^{-1}(b))$
Nach Satz-1 ist $\mathbb{Z}$ damit eine Gruppe mit der Verknüpfung $\oplus$ und $\mathbb{Z}$ und A sind isomorph.

2.4.2 Eigenschaften von $\mathbb{Z}$

1)
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

2)
$\mathbb{Z} = \{a \oplus b^{-1} \mid a, b \in \mathbb{N}\}$

Beweis:
1) klar

2)
a)
Es gilt: $\Phi([x, y]) = x \oplus y^{-1}$
Denn:
$\Phi([x, y]) = \Phi([x, 0] + [0, y]) = \Phi([x, 0] + [y, 0]^{-1}) = \Phi([x, 0]) \oplus \Phi([y, 0]^{-1}) = \Phi([x, 0]) \oplus (\Phi([y, 0]))^{-1}$
$= x \oplus y^{-1}$

$\Phi([x+h, h]) = \Phi([x+h+h, h+h]) = \Phi([x+h, h]+[h, h]) = \Phi([x+h, h]+[h, h]^{-1}) = \Phi([x+h, h]\oplus\Phi([h, h]^{-1}) =$
$\Phi([x + h, h] \oplus (\Phi([h, h]))^{-1}$
$= x \oplus 0^{-1}$

b)

$$\begin{aligned} z \in LS \iff & \exists a, b\ z = [a,b] = \Phi([a,b]) = a \oplus b^{-1} \in RS \quad \vee \\ & \exists a\ z = a = \Phi([a+h,h]) = a \oplus 0^{-1} = a \in RS. \\ \iff & z \in RS \end{aligned}$$

2.4.3 Abkürzung

$a \oplus b^{-1}$ kürzt man durch $a - b$ ab.
also:
$a - b := a \oplus b^{-1}$

2.4.4 Multiplikation auf $\mathbb{Z}$

Man definiert eine Verknüpfung $\otimes$ auf $\mathbb{Z}$ mit:
$a \otimes 0 := 0$
$a \otimes -b := -(a \cdot b)$
$-a \otimes -b := a \cdot b$
$a \otimes (b - c) := a \cdot b - a \cdot c$

Analog für $0 \otimes a$, usw.

Man kann man das Erfülltsein des Assoziativ-, Kommutativ- und Distributivgesetz zeigen.
Damit ist $\mathbb{Z}$ ein kommunitativer Ring.

3 Konstruktion von $\mathbb{Q} \supset \mathbb{Z}$ aus $\mathbb{Z}$

3.1 Um was es geht

Informal:
Beabsichtigt wird, eine (aus der Schule bekannte) rationale Zahl der Form a/b
als ein Paar (a,b) zu formalisieren.
So einfach geht das nicht,denn dann wäre z.B. 3/7 = 6/14, also (3,7) = (6,14).
Diese 2 Paare sind aber verschieden.
Deshalb definiert man eine Äquivalenzrelation auf den Zahlenpaaren, wobei zwei Zahlenpaare äquivalent sind, wenn ihr Quotient gleich ist. Also:
$(a, b) \sim (c, d) \Longleftrightarrow a/b = c/d$
Da der Quatient nicht definiert ist, formt man um und erhält die:

Formale Spezifikation:
$(a, b) \sim (c, d) :\Longleftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$
Eine rationale Zahl a/b wird dann als die Äquivalenzklasse [a,b] := K((a,b)) formalisiert.

3.2 Konstruktion von M

$M := \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_0 = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$

3.2.1 Verknüpfung auf M

Informal:
Beabsichtigt wird die Addition und Multiplikation zweier rationaler Zahlen a/b und c/d so durchzuführen:
a/b + c/d = (ad+bc)/bd
$a/b \cdot c/d = ac/bd$
Da der Quotient nicht definiert ist, formt man um und erhält die:

Formale Spezifikation:
(a,b) + (c,d) = (ad+bc , bd)
$(a, b) \cdot (c, d) = (ac, bd)$

Bemerkung:
Für die Verknüpfungen + und $\cdot$ in M und A werden jeweils die gleichen Zeichen + und $\cdot$ verwendet.

3.2.2 Äquivalenzrelation auf M

siehe oben:
$(a, b) \sim (c, d) :\Longleftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$

3.3 Konstruktion von A als Menge der Äquivalenzklassen auf M

3.3.1 A := Menge der Äquivalenzklassen auf M

$A := \{K([x,y]) \mid (x,y) \in M\}$

3.3.2 Verknüpfung auf A

Da gilt:
$(a,b) \sim (c,d) \wedge (a',b') \sim (c',d') \Longrightarrow (a,b) + (a',b') \sim (c,d) + (c',d')$
und
$(a,b) \sim (c,d) \wedge (a',b') \sim (c',d') \Longrightarrow (a,b) \cdot (a',b') \sim (c,d) \cdot (c',d')$

Die Äquivalenzrelation auf M ist eine Kongruenzrelation.
Deshalb sind nach Satz-3 die folgende Verknüpfungen auf den Äquivalenzklassen definiert:
$[a,b] + [c,d) = [ad + bc, bd]$
$[a,b] \cdot [c,d] = [ac, bd]$

D.h. die Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ auf M lassen sich auf die Äquivalenzklassen ërweitern".

Bemerkung:
Für die Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ in M und A werden jeweils die gleichen Zeichen $+$ und $+$ und $\cdot$ verwendet.

3.3.3 A ist ein Körper

Man kann zeigen, dass A ein Körper ist mit:
$[0,h]$ ist Nullelement und $[-a,b]$ additives Inverses von $[a,b]$
$[h,h]$ ist Einselement und $[b,a]$ multiplikatives Inverses von $[a,b]$ (mit $[a,b] \neq 0$)

3.4 Konstruktion von $\mathbb{Q}$ als isomorphes Bild von A

3.4.1 Konstruktion eines Isomorphismus

Informal:
Beabsichtigt wird in A die Menge $T := \{[ah,h] \mid a \in \mathbb{Z} \wedge h \in \mathbb{Z}\}$
durch $\mathbb{Z}$ zu ersetzen, wobei die sich dann ergebende Menge dann ein isomorphes Bild von A ist.

Formal:
$T := \{[ah,h] \mid (ah,h) \in M\}$
$\mathbb{Q} := \mathbb{Z} \cup (A \setminus T)$
$\Phi : A \to \mathbb{Q}$ mit:
$\Phi([a,b]) := [a,b] \qquad$ falls $[a,b] \in A \setminus T$
$\Phi([ah,h]) := a \qquad$ sonst
Damit ist Φ eine Bijektion.
Man definiert die Verknüpfungen $\oplus$ und $\otimes$ auf $\mathbb{Z}$:
$a \oplus b := \Phi(\Phi^{-1}(a) + \Phi^{-1}(b))$
$a \otimes b := \Phi(\Phi^{-1}(a) \cdot \Phi^{-1}(b))$

Nach Satz-2 ist $\mathbb{Q}$ damit ein Köroer mit den Verknüpfungen $\oplus$ und $\otimes$ und $\mathbb{Q}$ und A sind isomorph.

3.4.2 Eigenschaften von $\mathbb{Q}$

1)
$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

2)
$\mathbb{Q} = \{a \otimes b^{-1} \mid a, b \in Z\}$

Beweis:
1) klar

2)
a)
Es gilt: $\Phi([x,y]) = x \otimes y^{-1}$
Denn:
$\Phi([x,y]) = \Phi([xh,h] \cdot [h,yh]) = \Phi([xh,h] \cdot [yh,h]^{-1}) = \Phi([xh,h]) \otimes \Phi([yh,h]^{-1}) = \Phi([xh,h]) \otimes (\Phi([yh,h]))^{-1}$
$= x \otimes y^{-1}$

$\Phi([xh,h]) = \Phi([xh,h] \cdot [h,h]) = \Phi([xh,h] \cdot [h,h]^{-1}) = \Phi([xh,h]) \otimes \Phi([h,h]^{-1}) = \Phi([xh,h]) \otimes (\Phi([h,h]))^{-1}$
$= x \otimes 1^{-1}$

b)
$$\begin{aligned} z \in LS &\iff \exists a,b\ z = [a,b] = \Phi([a,b]) = a \otimes b^{-1} \in RS \quad \vee \\ &\ \exists a\ z = a = \Phi([ah,h]) = a \otimes 0 \otimes [h,h] = a \in RS. \\ &\iff z \in RS \end{aligned}$$

3.4.3 Abkürzung

$a \otimes b^{-1}$ kürzt man durch a/b ab.
also:
$a/b := a \otimes b^{-1}$

4 Konstruktion von $\mathbb{C} \supset \mathbb{R}$ aus $\mathbb{R}$

4.1 Konstruktion von C aus $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ ist ein Körper mit den Verknüpfungen $+$ und $\cdot$
Definiere:
$C := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
$(a, b) \oplus (c, d) := (a + c, b + d)$
$(a, b) \otimes (c, d) := (a \cdot c - b \cdot d, a \cdot d + b \cdot c)$
kurz:
$(a, b) \otimes (c, d) := (ac - bd, ad + bc)$

4.1.1 Satz1

$(C, \oplus, \otimes)$ ist ein Körper

4.1.2 Konstruktion eines Isomorphismus

Informal:
Beabsichtigt wird in C die Menge $T := \{(r, 0) \mid r \in \mathbb{R}\}$
durch $\mathbb{R}$ zu ersetzen, wobei die sich dann ergebende Menge dann ein isomorphes Bild von R ist.

Formal:
$i := (0, 1)$
$T := \{(r, 0) \mid r \in \mathbb{R}\}$
$\mathbb{C} := \mathbb{R} \cup (C \setminus T) = \mathbb{R} \cup (\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \mathbb{R} \times \{0\})$
$\Phi : C \to \mathbb{C}$ mit:
$\Phi((a, b)) := (a, b)$ falls $(a, b) \in C \setminus T$ d.h. $b \neq 0$
$\Phi((a, b)) := a$ sonst d.h. b=0
Damit ist Φ eine Bijektion.
Man definiert die Verknüpfungen $\oplus$ und $\otimes$ auf $\mathbb{C}$:
$a \oplus b := \Phi(\Phi^{-1}(a) + \Phi^{-1}(b))$
$a \otimes b := \Phi(\Phi^{-1}(a) \cdot \Phi^{-1}(b))$
Nach Satz-2 ist $\mathbb{C}$ damit ein Körper mit den Verknüpfungen $\oplus$ und $\otimes$ und $\mathbb{C}$ und C sind isomorph.

4.1.3 Eigenschaften von $\mathbb{C}$

1)
$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

2)
$\mathbb{C} = \{a \oplus b \otimes i \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

3)
$a \oplus b = a + b$ falls $a, b \in \mathbb{R}$

Beweis:
1)
klar

2)
a)
Es gilt: $\Phi((x,y)) = x \oplus y \otimes i$
Denn:
$\Phi((x,y)) = \Phi((x,0)) + (0,y)) = \Phi((x,0)) + (y,0) \cdot i) = \Phi((x,0)) \oplus \Phi((y,0)) \otimes \Phi(i)) = x \oplus y \otimes i$

b)
$$\begin{aligned} z \in LS &\iff \exists a,b\ z = (a,b) = \Phi((a,b)) = a \oplus b \otimes i \in RS \quad \vee \\ &\ \exists a\ z = a = \Phi((a,0)) = a \oplus 0 \otimes i = a \in RS. \\ &\iff z \in RS \end{aligned}$$

3)
$a \oplus b = \Phi(\Phi^{-1}(a) + \Phi^{-1}(b)) = \Phi((a,0) + (b,0)) = \Phi((a+b,0)) = a + b$