

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ **und** $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

15. Februar 2026

Inhaltsverzeichnis

1	Vorbemerkungen	3
1.1	Die Grundidee	3
1.2	Satz-1	3
1.3	Satz-2	3
1.4	Satz-3	3
1.5	Die natürlichen Zahlen \mathbb{N}	4
2	Konstruktion von $\mathbb{Z} \supset \mathbb{N}$ aus \mathbb{N}	5
2.1	Um was es geht	5
2.2	Konstruktion von M	5
2.2.1	Verknüpfung auf M	5
2.2.2	Äquivalenzrelation auf M	5
2.3	Konstruktion von A als Menge der Äquivalenzklassen auf M	5
2.3.1	$A :=$ Menge der Äquivalenzklassen auf M	5
2.3.2	Verknüpfung auf A	6
2.3.3	A ist eine Gruppe	6
2.4	Konstruktion von \mathbb{Z} als isomorphes Bild von A	6
2.4.1	Konstruktion eines Isomorphismus	6
2.4.2	Eigenschaften von \mathbb{Z}	6
2.4.3	Abkürzung	7
2.4.4	Multiplikation auf \mathbb{Z}	7
3	Konstruktion von $\mathbb{Q} \supset \mathbb{Z}$ aus \mathbb{Z}	8
3.1	Um was es geht	8
3.2	Konstruktion von M	8
3.2.1	Verknüpfung auf M	8
3.2.2	Äquivalenzrelation auf M	8
3.3	Konstruktion von A als Menge der Äquivalenzklassen auf M	9
3.3.1	$A :=$ Menge der Äquivalenzklassen auf M	9
3.3.2	Verknüpfung auf A	9
3.3.3	A ist ein Körper	9
3.4	Konstruktion von \mathbb{Q} als isomorphes Bild von A	9
3.4.1	Konstruktion eines Isomorphismus	9
3.4.2	Eigenschaften von \mathbb{Q}	10
3.4.3	Abkürzung	10
4	Konstruktion von $\mathbb{C} \supset \mathbb{R}$ aus \mathbb{R}	11
4.1	Konstruktion von \mathbb{C} aus \mathbb{R}	11
4.1.1	Satz1	11
4.1.2	Konstruktion eines Isomorphismus	11
4.1.3	Satz2	11
4.1.4	Eigenschaften von \mathbb{C}	11

1 Vorbemerkungen

In vielen Büchern wird versucht die Teilmengenbeziehung $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ und $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ mit Hilfe der sogenannten Identifikation zu begründen.

Hier wird der Versuch gemacht, das formal korrekter zu machen.

1.1 Die Grundidee

Es sei $\{ \text{"null"}, \text{"eins"}, \text{"zwei"}, \text{"drei"}, \text{"vier"}, 5, 6, 7, 8, , \dots \}$ eine (ungewohnte) Kodierung der Menge der natürlichen Zahlen.

Angenommen man will die Menge $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ in die Menge $\{ \text{"null"}, \text{"eins"}, \text{"zwei"}, \text{"drei"}, \text{"vier"}, 5, 6, 7, 8, , \dots \}$ einbetten, d.h. zur Teilmenge machen, dann geht das nicht so einfach, weil keine Teilmengenbeziehung vorliegt.

Man kann aber diese (ungewohnt) kodierte Menge der natürlichen Zahlen entsprechend umkodieren

d.h. dort die Menge $\{ \text{"null"}, \text{"eins"}, \text{"zwei"}, \text{"drei"}, \text{"vier"} \}$ durch $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ ersetzen

und bekommt dann die (bekannte Notation der) Menge der natürlichen Zahlen $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, , \dots \}$.

Dann hat man Menge $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ in die (bekannte Notation der) Menge der natürlichen Zahlen $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, , \dots \}$ eingebettet.

1.2 Satz-1

Sei M eine Menge, $\mathbb{G} = (G, +)$ eine Gruppe und $\Phi : G \mapsto M$ eine Bijektion.

Seien $x, y \in M$ und \oplus eine Verknüpfungen auf M , mit:

$$x \oplus y = \Phi(\Phi^{-1}(x) + \Phi^{-1}(y))$$

Dann ist $\mathbb{M} = (M, \oplus)$ eine Gruppe und Φ ein Isomorphismus.

1.3 Satz-2

Sei M eine Menge, $\mathbb{K} = (K, +, \cdot)$ ein Körper und $\Phi : K \mapsto M$ eine Bijektion.

Seien $x, y \in M$ und \oplus bzw. \otimes Verknüpfungen auf M mit:

$$x \oplus y = \Phi(\Phi^{-1}(x) + \Phi^{-1}(y))$$

$$x \otimes y = \Phi(\Phi^{-1}(x) \cdot \Phi^{-1}(y))$$

Dann ist $\mathbb{M} = (M, \oplus, \otimes)$ ein Körper und Φ ein Isomorphismus.

siehe:

<http://www.math.uni-konstanz.de/numerik/personen/gubisch/de/teaching/ws1011/exercises01.pdf>

1.4 Satz-3

Sei S eine Menge mit n Verknüpfungen \odot_i und S mit

$$S = \bigcup_{x \in R} K(x)$$

eine Zerlegung in paarweise verschiedene Äquivalenzklassen mit Repräsentanten $x \in R \subset S$

Genau dann definiert

$K(a) \odot_i K(b) = K(a \odot_i b)$ für jedes i mit $1 \leq i \leq n$ mit $a, b \in S$ eine Verknüpfung auf $\{K(x) \mid x \in R\}$

wenn:

die durch die Zerlegung von S induzierte Äquivalenzrelation eine Kongruenzrelation auf S ist.

1.5 Die natürlichen Zahlen \mathbb{N}

Die bekannte Menge $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

mit ihren bekannten Verknüpfungen $+$ und \cdot wird als die Menge der natürlichen Zahlen bezeichnet.

2 Konstruktion von $\mathbb{Z} \supset \mathbb{N}$ aus \mathbb{N}

2.1 Um was es geht

Informal:

Beabsichtigt wird, eine (aus der Schule bekannte) ganze Zahl der Form $a-b$ als ein Paar (a,b) zu formalisieren.

So einfach geht das nicht, denn dann wäre z.B. $3-7 = 4-8$, also $(3,7) = (4,8)$.

Diese 2 Paare sind aber verschieden.

Deshalb definiert man eine Äquivalenzrelation auf den Zahlenpaaren, wobei zwei Zahlenpaare äquivalent sind, wenn ihre Differenz gleich ist. Also:

$$(a, b) \sim (c, d) \iff a - b = c - d$$

Da die Differenz nicht definiert ist, formt man um und erhält die:

Formale Spezifikation:

$$(a, b) \sim (c, d) :\iff a + d = c + b$$

Eine ganze Zahl $a-b$ wird dann als die Äquivalenzklasse $[a,b] := K((a,b))$ formalisiert.

2.2 Konstruktion von M

$$M := \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

2.2.1 Verknüpfung auf M

Informal:

Beabsichtigt wird die Addition zweier ganzer Zahlen $a-b$ und $c-d$ so durchzuführen:

$$a-b + c-d = a+c - (b+d)$$

Da die Differenz nicht definiert ist, formt man um und erhält die:

Formale Spezifikation:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

2.2.2 Äquivalenzrelation auf M

siehe oben:

$$(a, b) \sim (c, d) :\iff a + d = b + c$$

2.3 Konstruktion von A als Menge der Äquivalenzklassen auf M

2.3.1 $A :=$ Menge der Äquivalenzklassen auf M

$$A := \{K([x, y]) \mid x, y \in \mathbb{N}\}$$

Die folgenden Elemente bilden ein vollständiges Repräsentantensystem der obigen Äquivalenzklasse:

$(0,k)$, $(k,0)$ mit $k \in \mathbb{N}$, also:

$$A = \{K([(0, k)]) \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{K([(k, 0)]) \mid k \in \mathbb{N}\}$$

2.3.2 Verknüpfung auf A

Die Äquivalenzrelation auf M ist eine Kongruenzrelation.

Deshalb ist nach Satz-3 die folgende Verknüpfung auf den Äquivalenzklassen definiert:

$$[a, b] + [c, d] := [a + c, b + d]$$

D.h. die Verknüpfung + auf M läßt sich auf die Äquivalenzklassen erweitern".

Bemerkung:

Für die Verknüpfung + in \mathbb{N} , M und A werden jeweils die gleichen Zeichen + verwendet.

2.3.3 A ist eine Gruppe

Man kann zeigen, dass A eine Gruppe ist mit:

$[h, h]$ ist Einselement und $[b, a]$ ist das Inverse von $[a, b]$

2.4 Konstruktion von \mathbb{Z} als isomorphes Bild von A

2.4.1 Konstruktion eines Isomorphismus

Informal:

Beabsichtigt wird in A die Menge $T := \{[a + h, h] \mid a \in \mathbb{N} \wedge h \in \mathbb{N}\}$

durch \mathbb{N} zu ersetzen, wobei die sich dann ergebende Menge dann ein isomorphes Bild von A ist.

Formal:

$$T := \{[a + h, h] \mid a \in \mathbb{N} \wedge h \in \mathbb{N}\}$$

$$\mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup (A \setminus T)$$

$\Phi : A \rightarrow \mathbb{Z}$ mit:

$$\Phi([a, b]) := [a, b] \quad \text{falls } [a, b] \in A \setminus T$$

$$\Phi([a + h, h]) := a \quad \text{sonst}$$

Damit ist Φ eine Bijektion.

Man definiert die Verknüpfung \oplus auf \mathbb{Z} :

$$a \oplus b := \Phi(\Phi^{-1}(a) + \Phi^{-1}(b))$$

Nach Satz-1 ist \mathbb{Z} damit eine Gruppe mit der Verknüpfung \oplus und \mathbb{Z} und A sind isomorph.

2.4.2 Eigenschaften von \mathbb{Z}

1)

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$$

2)

$$\mathbb{Z} = \{a \oplus b^{-1} \mid a, b \in \mathbb{N}\}$$

Beweis:

1) klar

2)

a)

$$\text{Es gilt: } \Phi([x, y]) = x \oplus y^{-1}$$

Denn:

$$\begin{aligned} \Phi([x, y]) &= \Phi([x, 0] + [0, y]) = \Phi([x, 0] + [y, 0]^{-1}) = \Phi([x, 0]) \oplus \Phi([y, 0]^{-1}) = \Phi([x, 0]) \oplus (\Phi([y, 0]))^{-1} \\ &= x \oplus y^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi([x+h, h]) &= \Phi([x+h+h, h+h]) = \Phi([x+h, h] + [h, h]) = \Phi([x+h, h] + [h, h]^{-1}) = \Phi([x+h, h]) \oplus \Phi([h, h]^{-1}) = \\ &= \Phi([x+h, h]) \oplus (\Phi([h, h]))^{-1} \\ &= x \oplus 0^{-1} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
z \in LS &\iff \exists a, b \ z = [a, b] = \Phi([a, b]) = a \oplus b^{-1} \in RS \quad \vee \\
&\exists a \ z = a = \Phi([a + h, h]) = a \oplus 0^{-1} = a \in RS. \\
&\iff z \in RS
\end{aligned}$$

2.4.3 Abkürzung

$a \oplus b^{-1}$ kürzt man durch $a - b$ ab.

also:

$$a - b := a \oplus b^{-1}$$

2.4.4 Multiplikation auf \mathbb{Z}

Man definiert eine Verknüpfung \otimes auf \mathbb{Z} mit:

$$a \otimes 0 := 0$$

$$a \otimes -b := -(a \cdot b)$$

$$-a \otimes -b := a \cdot b$$

$$a \otimes (b - c) := a \cdot b - a \cdot c$$

Analog für $0 \otimes a$, usw.

Man kann man das Erfülltsein des Assoziativ-, Kommutativ- und Distributivgesetz zeigen. Damit ist \mathbb{Z} ein kommutativer Ring.

3 Konstruktion von $\mathbb{Q} \supset \mathbb{Z}$ aus \mathbb{Z}

3.1 Um was es geht

Informal:

Beabsichtigt wird, eine (aus der Schule bekannte) rationale Zahl der Form a/b als ein Paar (a,b) zu formalisieren.

So einfach geht das nicht, denn dann wäre z.B. $3/7 = 6/14$, also $(3,7) = (6,14)$.

Diese 2 Paare sind aber verschieden.

Deshalb definiert man eine Äquivalenzrelation auf den Zahlenpaaren, wobei zwei Zahlenpaare äquivalent sind, wenn ihr Quotient gleich ist. Also:

$$(a,b) \sim (c,d) \iff a/b = c/d$$

Da der Quotient nicht definiert ist, formt man um und erhält die:

Formale Spezifikation:

$$(a,b) \sim (c,d) :\iff a \cdot d = b \cdot c$$

Eine rationale Zahl a/b wird dann als die Äquivalenzklasse $[a,b] := K((a,b))$ formalisiert.

3.2 Konstruktion von M

$$M := \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_0 = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$$

3.2.1 Verknüpfung auf M

Informal:

Beabsichtigt wird die Addition und Multiplikation zweier rationaler Zahlen a/b und c/d so durchzuführen:

$$a/b + c/d = (ad+bc)/bd$$

$$a/b \cdot c/d = ac/bd$$

Da der Quotient nicht definiert ist, formt man um und erhält die:

Formale Spezifikation:

$$(a,b) + (c,d) = (ad+bc, bd)$$

$$(a,b) \cdot (c,d) = (ac, bd)$$

Bemerkung:

Für die Verknüpfungen $+$ und \cdot in M und A werden jeweils die gleichen Zeichen $+$ und \cdot verwendet.

3.2.2 Äquivalenzrelation auf M

siehe oben:

$$(a,b) \sim (c,d) :\iff a \cdot d = b \cdot c$$

3.3 Konstruktion von A als Menge der Äquivalenzklassen auf M

3.3.1 A := Menge der Äquivalenzklassen auf M

$$A := \{K([x, y]) \mid (x, y) \in M\}$$

3.3.2 Verknüpfung auf A

Da gilt:

$$(a, b) \sim (c, d) \wedge (a', b') \sim (c', d') \implies (a, b) + (a', b') \sim (c, d) + (c', d')$$

und

$$(a, b) \sim (c, d) \wedge (a', b') \sim (c', d') \implies (a, b) \cdot (a', b') \sim (c, d) \cdot (c', d')$$

Die Äquivalenzrelation auf M ist eine Kongruenzrelation.

Deshalb sind nach Satz-3 die folgende Verknüpfungen auf den Äquivalenzklassen definiert:

$$[a, b] + [c, d] = [ad + bc, bd]$$

$$[a, b] \cdot [c, d] = [ac, bd]$$

D.h. die Verknüpfungen $+$ und \cdot auf M lassen sich auf die Äquivalenzklassen erweitern".

Bemerkung:

Für die Verknüpfungen $+$ und \cdot in M und A werden jeweils die gleichen Zeichen $+$ und \cdot verwendet.

3.3.3 A ist ein Körper

Man kann zeigen, dass A ein Körper ist mit:

$$[0, h] \text{ ist Nullelement und } [-a, b] \text{ additives Inverses von } [a, b]$$

$$[h, h] \text{ ist Einselement und } [b, a] \text{ multiplikatives Inverses von } [a, b] \text{ (mit } [a, b] \neq 0)$$

3.4 Konstruktion von \mathbb{Q} als isomorphes Bild von A

3.4.1 Konstruktion eines Isomorphismus

Informal:

$$\text{Beabsichtigt wird in A die Menge } T := \{[ah, h] \mid a \in \mathbb{Z} \wedge h \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$$

durch \mathbb{Z} zu ersetzen, wobei die sich dann ergebende Menge dann ein isomorphes Bild von A ist.

Formal:

$$T := \{[ah, h] \mid (ah, h) \in M\}$$

$$\mathbb{Q} := \mathbb{Z} \cup (A \setminus T)$$

$\Phi : A \rightarrow \mathbb{Q}$ mit:

$$\Phi([a, b]) := [a, b] \quad \text{falls } [a, b] \in A \setminus T$$

$$\Phi([ah, h]) := a \quad \text{sonst}$$

Damit ist Φ eine Bijektion.

Man definiert die Verknüpfungen \oplus und \otimes auf \mathbb{Z} :

$$a \oplus b := \Phi(\Phi^{-1}(a) + \Phi^{-1}(b))$$

$$a \otimes b := \Phi(\Phi^{-1}(a) \cdot \Phi^{-1}(b))$$

Nach Satz-2 ist \mathbb{Q} damit ein Körper mit den Verknüpfungen \oplus und \otimes und \mathbb{Q} und A sind isomorph.

3.4.2 Eigenschaften von \mathbb{Q}

1)

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

2)

a) Für alle $[a, b] \in \mathbb{Q}$ gilt: $[a, b] = a \otimes b^{-1}$ b) Für alle $a \in \mathbb{Q}$ gilt: $a = a \otimes 1^{-1}$ c) $\mathbb{Q} = \{a \otimes b^{-1} \mid (a, b) \in M\}$

Beweis:

1) klar

2)

a)

$$\begin{aligned}
[x, y] &= \Phi([x, y]) = \Phi([xh, h] \cdot [h, yh]) = \Phi([xh, h] \cdot [yh, h]^{-1}) = \Phi([xh, h]) \otimes \Phi([yh, h]^{-1}) = \Phi([xh, h]) \otimes \\
&(\Phi([yh, h]))^{-1} \\
&= x \otimes y^{-1}
\end{aligned}$$

b)

klar (Körperregeln)

c)

folgt aus a) und b)

unnötig: (da dies aus Körperregeln folgt)

$$\begin{aligned}
x &= \Phi([xh, h]) = \Phi([xh, h] \cdot [h, h]) = \Phi([xh, h] \cdot [h, h]^{-1}) = \Phi([xh, h]) \otimes \Phi([h, h]^{-1}) = \Phi([xh, h]) \otimes (\Phi([h, h]))^{-1} \\
&= x \otimes 1^{-1}
\end{aligned}$$

3.4.3 Abkürzung $a \otimes b^{-1}$ kürzt man durch a/b ab.

also:

Für alle $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ gilt: $a/b := a \otimes b^{-1}$

Folgerung:

Für alle $a \in \mathbb{Z}$ gilt: $a/1 := a \otimes 1^{-1} = a \otimes 1 = a$

4 Konstruktion von $\mathbb{C} \supset \mathbb{R}$ aus \mathbb{R}

4.1 Konstruktion von \mathbb{C} aus \mathbb{R}

\mathbb{R} ist ein Körper mit den Verknüpfungen $+$ und \cdot .

Definiere:

$$C := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$$(a, b) \oplus (c, d) := (a + c, b + d)$$

$$(a, b) \otimes (c, d) := (a \cdot c - b \cdot d, a \cdot d + b \cdot c)$$

kurz:

$$(a, b) \otimes (c, d) := (ac - bd, ad + bc)$$

4.1.1 Satz1

(C, \oplus, \otimes) ist ein Körper

4.1.2 Konstruktion eines Isomorphismus

Informal:

Beabsichtigt wird in C die Menge $T := \{(r, 0) \mid r \in \mathbb{R}\}$

durch \mathbb{R} zu ersetzen, wobei die sich dann ergebende Menge dann ein isomorphes Bild von \mathbb{R} ist.

Formal:

$$i := (0, 1)$$

$$T := \{(r, 0) \mid r \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathbb{C} := \mathbb{R} \cup (C \setminus T) = \mathbb{R} \cup (\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \mathbb{R} \times \{0\})$$

$\Phi: C \rightarrow \mathbb{C}$ mit:

$$\Phi((a, b)) := (a, b) \quad \text{falls } (a, b) \in C \setminus T \quad \text{d.h. } b \neq 0$$

$$\Phi((a, b)) := a \quad \text{sonst d.h. } b=0$$

Damit ist Φ eine Bijektion.

Man definiert die Verknüpfungen \boxplus und \boxtimes auf \mathbb{C} :

$$a \boxplus b := \Phi(\Phi^{-1}(a) \oplus \Phi^{-1}(b))$$

$$a \boxtimes b := \Phi(\Phi^{-1}(a) \otimes \Phi^{-1}(b))$$

4.1.3 Satz2

- 1) \mathbb{C} ist ein Körper mit den Verknüpfungen \boxplus und \boxtimes
- 2) \mathbb{R} und \mathbb{C} sind isomorph.

Beweis:

Nach Satz-2 (siehe oben) und (siehe oben „Formal“) ist \mathbb{C} ein Körper mit den Verknüpfungen \boxplus und \boxtimes und \mathbb{R} und \mathbb{C} sind isomorph.

4.1.4 Eigenschaften von \mathbb{C}

1)

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

2)

a) Für alle $(a, b) \in \mathbb{C}$ gilt: $(a, b) = a \boxplus b \boxtimes i$

b) Für alle $a \in \mathbb{C}$ gilt: $a = a \boxplus 0 \boxtimes i$

$$c) \mathbb{C} = \{a \boxplus b \boxtimes i \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

3)

$$a \boxplus b = a + b \quad \text{falls } a, b \in \mathbb{R}$$

4)

$$a_1 \boxplus b_1 \boxtimes i = a_2 \boxplus b_2 \boxtimes i \iff a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2$$

Beweis:

1)

klar

2)

a)

$$(a, y) = \Phi((a, b)) = \Phi((a, 0) \oplus (0, b)) = \Phi((a, 0) \oplus (b, 0) \otimes i) = \Phi((a, 0)) \boxplus \Phi((b, 0)) \boxtimes \Phi(i) = x \boxplus b \boxtimes i$$

b)

klar (Körperregeln)

c)

folgt aus a) und b)

3)

$$a \boxplus b = \Phi(\Phi^{-1}(a) \oplus \Phi^{-1}(b)) = \Phi((a, 0) \oplus (b, 0)) = \Phi((a + b, 0)) = a + b$$

4)

$$a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2 \iff (a_1, b_1) = (a_2, b_2) \iff \Phi((a_1, b_1)) = \Phi((a_2, b_2)) \iff a_1 \oplus b_1 \otimes i = a_2 \oplus b_2 \otimes i$$