Problematische Symbole und Operationen wie z.B. Division durch 0 - formuliert in der Prädikatenlogik 1. Stufe

Mustermann

27. August 2025

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen **4**
1.1 Ein paar Lemmata . . . 4
1.1.1 Lemma 1 . . . 4
1.1.2 Lemma 2 . . . 4
1.2 Einführung neuer Symbole . . . 4
1.3 Definitorische Erweiterung durch neue Operationssymbole (Funktionssymbole) . . . 4
1.4 Satz über Definitionserweiterung . . . 5
1.5 Beispiel (siehe unten) . . . 5
1.5.1 Behauptung . . . 5
1.5.2 Umformung (syntaktische Interpretation) . . . 5

2 Körper **6**
2.1 Axiome des Körpers K . . . 6
2.2 Einführung einer Inversen im Körper K . . . 6
2.3 Bemerkung: Verschiedene Formalisierungen von Gruppen . . . 6
2.3.1 1. Version . . . 6
2.3.2 2. Version . . . 6
2.3.3 3. Version . . . 7

3 Pseudokörper **8**
3.1 Axiome des Pseudokörpers K_{P_0} . . . 8
3.2 Behauptungen . . . 8
3.3 Isomorphie . . . 9
3.3.1 Isomorphie . . . 9
3.3.2 Keine Isomorphie . . . 9
3.3.3 Isomorphie . . . 10
3.4 Vergleich Körper - Pseudokörper . . . 10

4 Probleme bei der Division **11**
4.1 Version 1: Einführung einer mangelhaften Division . . . 11
4.1.1 Behauptungen . . . 11
4.1.1.1 Behauptung1 . . . 11
4.1.1.2 Behauptung2 . . . 11
4.1.2 Eigenschaften dieser Division . . . 11
4.1.2.1 Eine mögliche Folgerung . . . 12
4.2 Version 2: Einführung einer mangelhaften Division . . . 12
4.2.1 Behauptungen . . . 12
4.2.1.1 Behauptung1 . . . 12
4.2.1.2 Behauptung2 . . . 12
4.2.2 Eigenschaften dieser Division . . . 12
4.3 Einführung einer besseren Division . . . 13
4.3.1 S-Definition . . . 13
4.3.2 Bemerkung . . . 13
4.3.3 Behauptungen . . . 13
4.4 Einführung einer weiteren besseren Division . . . 13
4.4.1 S-Definition . . . 13
4.4.2 Behauptungen . . . 13

5 ZFC-Definitionserweiterungen **15**
5.1 S-Definition . . . 15

5.2 Keine S-Definition 15
5.2.1 Behauptung: 15
5.2.2 Eine mögliche Folgerung 15

1 Grundlagen

1.1 Ein paar Lemmata

1.1.1 Lemma 1

Sei T ein S-Term und Σ eine Menge von S-Ausdrücken. Dann gilt:
$\Sigma \vdash \exists x\ (T \equiv x)$

Beweis:
$\vdash y \equiv x \rightarrow y \equiv x$ Axiom
$\vdash y \equiv x \rightarrow \exists x\ (y \equiv x)$ hintere Partikularisierung
$\vdash y \equiv y \rightarrow \exists x\ (y \equiv x)$ subsituiere x durch y
$\vdash y \equiv y$ Axiom
$\vdash \exists x\ (y \equiv x)$ Modus Ponens
$\Sigma \vdash \exists x\ (y \equiv x)$
Substituiere y durch einen beliebigen S-Term T:
$\Sigma \vdash \exists x\ (T \equiv x)$

1.1.2 Lemma 2

Sei T ein S-Term und Σ eine Menge von S-Ausdrücken. Dann gilt:
$\Sigma \vdash \forall x\ (T \equiv T)$

Beweis:
$\vdash (x = x)$
$\Sigma \vdash (x = x)$
Substituiere x durch einen beliebigen S-Term T:
$\Sigma \vdash (T \equiv T)$, also
$\Sigma \vdash \forall x (T \equiv T)$

1.2 Einführung neuer Symbole

Um sich viel Schreibarbeit zu ersparen, führt man häufig neue Symbole hinzu, um ein vorhandenes System mit Abkürzungen auszustatten.
Diese neuen Symbole dürfen das System allerdings nicht in dem Sinne erweitern, dass sich die Menge der beweisbaren Sätze verändert (sich im schlimmsten Fall sogar alle Ausdrücke beweisen lassen). Dazu wird die so genannte definitorische Erweiterung eingeführt:

1.3 Definitorische Erweiterung durch neue Operationssymbole (Funktionssymbole)

Siehe: Ebbinghaus „Einführung in die mathematische Logik“6.Auflage S.136

Sei S die Symbolmenge und Φ eine Menge von S-Sätzen.
$\forall v_0 ... \forall v_n (f v_0 ... v_{n?1} \equiv v_n \leftrightarrow \phi_f(v_0, ..., v_{n-1}, v_n))$ ist eine S-Definition von f in Φ
gdw
$f \notin S$ ist ein n-stelliges Funktionssymbol und Φ ist eine Menge von S-Sätzen und $\phi_f(v_0, ..., v_{n-1}, v_n)$ ist ein S-Ausdruck und $\Phi \vdash \forall v_0 ... \forall v_{n-1} \exists! v_n \phi_f(v_0, ..., v_{n-1}, v_n)$

1.4 Satz über Definitionserweiterung

Φ sei eine Menge von S-Sätzen, s ein neues Symbol, δ_s eine S-Definition von s in Φ und I die zugehörige syntaktische Interpretation von $S \cup \{\delta_s\}$. Dann gilt:
Für alle Aussagen ϕ (Formeln ohne freie Variablen) in der Sprache mit der Symbolmenge $S \cup \{s\}$ gilt: $\Phi \cup \{\delta_s\} \vdash \phi$ gdw $\Phi \vdash \phi^I$

1.5 Beispiel (siehe unten)

K bezeichne die Körperaxiom (formuliert in der Prädikatenlogik 1. Stufe).
$\delta_s := \forall z \forall n \forall y (z/n \equiv y \leftrightarrow (n \neq 0 \rightarrow z = n \circ y) \wedge (n = 0 \rightarrow y \equiv 0))\} \vdash \forall x\ (x/0 = x/0)$
Durch eine S-Definitions kann man den Körper durch das Symbol / erweitern:
$S := \{+, -, \circ, 0, 1\}$
$S_2 = S \cup \{/\}$
$K_2 := K \cup \{\forall z \forall n \forall y (z/n \equiv y \leftrightarrow (n \neq 0 \rightarrow z = n \circ y) \wedge (n = 0 \rightarrow y \equiv 0))\}$

1.5.1 Behauptung

$\forall z \forall n \forall y (z/n \equiv y \leftrightarrow (n \neq 0 \rightarrow z = n \circ y) \wedge (n = 0 \rightarrow y \equiv 0))$ ist eine S-Definition von / in K
Also kann man obigen Satz anwenden:
$K_2 \vdash \forall a\ \forall b\ \forall n\ (n \neq 0 \rightarrow a/n + b/n = (a + b)/n$ gdw
$K_2 \vdash \forall a\ \forall b\ \forall n\ (n \neq 0 \rightarrow a/n + b/n = (a + b)/n)^I$

1.5.2 Umformung (syntaktische Interpretation)

Es gilt:
$(\forall a\ \forall b\ \forall n\ (n \neq 0 \rightarrow a/n + b/n \equiv (a + b)/n))^I =$
$\forall a\ \forall b\ \forall n\ (n \neq 0 \rightarrow a/n + b/n \equiv (a + b)/n)^I =$
$\forall a\ \forall b\ \forall n\ (n \neq 0 \rightarrow \exists x_1 [a/n + b/n \equiv x_1]^I \wedge [(a + b)/n \equiv x_1])^I =$
$\forall a\ \forall b\ \forall n\ (n \neq 0 \rightarrow \exists x_1 (\exists x_2 \exists x_3 ([a/n \equiv x_2]^I \wedge [b/n \equiv x_3]^I \wedge x_2 + x_3 \equiv x_1) =$
$\forall a\ \forall b\ \forall n\ (n \neq 0 \rightarrow \exists x_1 (\exists x_2 \exists x_3 ([(n \neq 0 \rightarrow a \equiv n \circ x_2) \wedge$
$(n \equiv 0 \rightarrow y \equiv 0)] \wedge [(n \neq 0 \rightarrow b \equiv n \circ x_3) \wedge (n \equiv 0 \rightarrow y \equiv 0)] \wedge x_2 + x_3 \equiv x_1)$

Man sieht:
Will man also eine Behauptung wie z.B:
$K_2 \vdash \forall a\ \forall b\ \forall n\ (n \neq 0 \rightarrow a/n + b/n = (a + b)/n$
nicht in K_2, sondern in K beweisen, müsste man vorher das Symbol / durch viele aufwendige Umformungen ersetzen.

2 Körper

Symbolmenge: $S := \{+, -, \circ, 0, 1\}$

2.1 Axiome des Körpers K

$\neg(0 \equiv 1)$
$\forall a \forall b \forall c\ a + (b + c) \equiv (a + b) + c$
$\forall a \forall b\ (a + b \equiv b + a)$
$\forall a\ (a + 0 \equiv a)$
$\forall a\ (a + -a \equiv 0)$

$\forall x \forall y \forall z\ (x \circ y) \circ z \equiv x \circ (y \circ z)$
$\forall x\ (x \circ 1 \equiv x)$
$\forall x \forall y\ (x \circ y \equiv y \circ x)$
$\forall x\ (x \neq 0 \rightarrow \exists x' x \circ x' \equiv 1)$

$\forall x \forall y \forall z\ (x \circ (y + z) \equiv x \circ y + x \circ z)$

2.2 Einführung einer Inversen im Körper K

Durch folgende S-Definition kann man zwar den Körper K durch das Symbol i erweitern:
$S := \{+, -, \circ, 0, 1\}$
$S_0 = S \cup \{i\}$
$K_0 := K \cup \{\forall x \forall y\ (i(x) \equiv y \leftrightarrow (x \neq 0 \rightarrow \exists x' x \circ x' \equiv 1 \wedge y = x?) \wedge (x = 0 \rightarrow y \equiv 0))\}$

Dies ist also auch eine gleichwertige Formalisierung eines Körpers (ähnlich wie bei Gruppen, siehe Bemerkung unten), bei der das 1-stellige Funktionssymbol i (das das Inverse intendieren soll) verwendet wird und die Menge der Beweise sich (gegenüber der ursprünglichen Körperdefinition) dabei nicht ändert.

2.3 Bemerkung: Verschiedene Formalisierungen von Gruppen

Bei Ebbinghaus („Einführung in die mathematische Logik“) gibt es 3 verschiedene Formalisierungen von Gruppen (mit 3 verschiedenen Symbolmengen):

2.3.1 1. Version

$S_G := \{\circ\}$
$\Phi_G = \{$
$\quad \forall x \forall y \forall z (x \circ y) \circ z \equiv x \circ (y \circ z),$
$\quad \exists z (\forall x\ x \circ z = x \wedge \forall x \exists y\ x \circ y \equiv z)$
$\}$

2.3.2 2. Version

$S_{Gr} := \{\circ, e\}\ \Phi_{Gr} = \{$
$\quad \forall v_0 \forall v_1 \forall v_2 (v_0 \circ v_1) \circ v_2 \equiv v_0 \circ (v_1 \circ v_2),$
$\quad \forall v_0 (v_0 \circ e \equiv v_0),$
$\quad \forall v_0 \exists v_1 (v_0 \circ v_1 \equiv e)$
$\}$

2.3.3 3. Version

$S_{Grp} := \{\circ, ^{-1}, e\}$ $\Phi_{Grp} = \{$
$\forall v_0 \forall v_1 \forall v_2 (v_0 \circ v_1) \circ v_2 \equiv v_0 \circ (v_1 \circ v_2),$
$\forall v_0 (v_0 \circ e \equiv v_0),$
$\forall v_0 (v_0 \circ v_0^{-1} \equiv e)$
$\}$

Durch entsprechende S-Definitionen sind die Menge der Beweise bei allen 3 Gruppen gleich.

3 Pseudokörper

Symbolmenge: $S_{P_1} := \{+, -, \circ, i, 0, 1\}$

3.1 Axiome des Pseudokörpers K_{P_0}

$\neg(0 \equiv 1)$
$\forall a \forall b \forall c\ a + (b + c) \equiv (a + b) + c$
$\forall a \forall b\ (a + b \equiv b + a)$
$\forall a\ (a + 0 \equiv a)$
$\forall a\ (a + -a \equiv 0)$

$\forall x \forall y \forall z\ (x \circ y) \circ z \equiv x \circ (y \circ z)$
$\forall x\ (x \circ 1 \equiv x)$
$\forall x \forall y\ (x \circ y \equiv y \circ x)$
$\forall x\ (x \neq 0 \rightarrow x \circ i(x) \equiv 1)$

$\forall x \forall y \forall z\ (x \circ (y + z) \equiv x \circ y + x \circ z)$

3.2 Behauptungen

Manche Behauptungen (alles in Prädikatenlogik 1. Stufe formuliert) kann man in Pseudokörpern nicht ableiten:
B1) Nicht $K_{P_0} \vdash i(0) \equiv 1$
B2) Nicht $K_{P_0} \vdash i(0) \equiv 0$
B3) Nicht $K_{P_0} \vdash i(0) \not\equiv 1$
B4) Nicht $K_{P_0} \vdash i(0) \not\equiv 0$

Beweis:
Zeige dazu (nach dem Vollständigkeitssatz):
Nicht $K_{P_0} \models i(0) \equiv 1$
Nicht $K_{P_0} \models i(0) \equiv 0$
Nicht $K_{P_0} \models i(0) \not\equiv 1$
Nicht $K_{P_0} \models i(0) \not\equiv 0$

genügt:
Gib jeweils ein Modell I an mit:
Nicht $I \models i(0) \equiv 1$
Nicht $I \models i(0) \equiv 0$
Nicht $I \models i(0) \not\equiv 1$
Nicht $I \models i(0) \not\equiv 0$

genügt:
Gib jeweils ein Modell I an mit:
$I \models i(0) \not\equiv 1$
$I \models i(0) \not\equiv 0$
$I \models i(0) \equiv 1$
$I \models i(0) \equiv 0$

1)

Konstruiere dazu folgende Modelle von Körpern mit Symbolmenge $S = \{+, -, \circ, i, 0, 1\}$, also reelle Zahlen mit:
$M^k := \mathbb{R}(+_\mathbb{R}, -_\mathbb{R}, \cdot_\mathbb{R}, i^k_\mathbb{R}, 0_\mathbb{R}, 1_\mathbb{R})$ mit:
$i^k_\mathbb{R} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, i_\mathbb{R}(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0_\mathbb{R} \\ k_\mathbb{R}, & x = 0_\mathbb{R} \end{cases}.$
2)
2.1)
Für M^{10} gilt:
$I \models i(0) \not\equiv 1$, denn
$i^{10}_\mathbb{R}(0_\mathbb{R}) = 10_\mathbb{R} \neq 1_\mathbb{R}$

2.2)
Für M^{20} gilt:
$I \models i(0) \not\equiv 0$, denn
$i^{20}_\mathbb{R}(0_\mathbb{R}) = 20_\mathbb{R} \neq 0_\mathbb{R}$

2.3)
Für M^1 gilt:
$I \models i(0) \equiv 1$, denn
$i^1_\mathbb{R}(0_\mathbb{R}) = 1_\mathbb{R} = 1_\mathbb{R}$

2.4)
Für M^0 gilt:
$I \models i(0) \equiv 0$, denn
$i^0_\mathbb{R}(0_\mathbb{R}) = 0_\mathbb{R} = 0_\mathbb{R}$

3.3 Isomorphie

Bem:
Im Folgenden bedeutet 10 bzw. 2 im Index, dass Zahlen im 10-er bzw. 2-er System angegeben sind)

3.3.1 Isomorphie

$M1_{K_0} = \mathbb{R}_{10}(0_{10}, 1_{10}, +_{10}, \circ_{10}) :=$ Menge der reellen Zahlen im 10-er System angegeben mit den entsprechenden Konstanten bzw. Funktionen sei ein Modell von K_0

$M2_{K_0} = \mathbb{R}_2(0_2, 1_2, +_2, \circ_2) :=$ Menge der reellen Zahlen im 2-er System angegeben mit den entsprechenden Konstanten bzw. Funktionen sei ein Modell von K_0.

Dann gilt:
$\Phi : \mathbb{R}_{10} \to \mathbb{R}_2$ ist ein Isomorphismus von $M1_{K_0}$ nach $M2_{K_0}$

3.3.2 Keine Isomorphie

$M1_{K_{P_0}} = \mathbb{R}_{10}(0_{10}, 1_{10}, +_{10}, \circ_{10}, i_{10})$ sei ein Modell von K_{P_0}
Es gelte dort (zusätzlich zu K_0):
$i_{10} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, i_{10}(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0_{10} \\ 110_{10}, & x = 0_{10} \end{cases}.$
$M2_{K_{P_0}} = \mathbb{R}_2(0_2, 1_2, +_2, \circ_2, i_2)$ sei ein Modell von K_{P_0}
Es gelte dort (zusätzlich zu K_2):
$i_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, i_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0_2 \\ 102_2, & x = 0_2 \end{cases}.$
Φ sei die um i erweiterte Abbildung Φ
$\Phi : \mathbb{R}_{10} \to \mathbb{R}_2$

ist nur "teilisomorph"(also nicht isomorph), denn:
$\Phi(x_{10}) := x_2$
Dort gilt dann für $x \neq 0_{10}$ und $x \neq 0_2$
$\Phi(i_{10}(x_{10})) = \Phi(\frac{1}{x_{10}}) = \frac{1}{x_2}$
$i_2(\Phi(x_{10})) = i_2(x_2) = \frac{1}{x_2}$
Aber (und deswegen "teilisomorph"):
$\Phi(i_{10}(0_{10})) = \Phi(110_{10}) = 110_2$
$i_2(\Phi(0_{10})) = i_2(0_2) = 102_2 \neq 110_2$

$\Phi : \mathbb{R}_{10} \to \mathbb{R}_2$ ist kein Isomorphismus von $M1_{K_{P_0}}$ nach $M2_{K_{P_0}}$

3.3.3 Isomorphie

Ersetze:
$\forall x\ (x \neq 0 \to x \circ i(x) \equiv 1)$
in K_{P_0} durch das Axiom:
$\forall x\ ((x \neq 0 \to x \circ i(x) \equiv 1) \wedge (x \equiv 0 \to i(0) \equiv 0))$
Den zugehörigen (veränderten) Körper wird mit K_{P_1} bezeichnet.

$M1_{K_{P_1}} = \mathbb{R}_{10}(0_{10}, 1_{10}, +_{10}, \circ_{10}, i_{10})$ sei ein Modell von K_{P_1}.
Es gelte dort (zusätzlich zu $M1_{K_{P_0}}$) :
$i_{10} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, i_{10}(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0_{10} \\ 0_{10}, & x = 0_{10} \end{cases}.$
$M2_{K_{P_1}} = \mathbb{R}_2(0_2, 1_2, +_2, \circ_2, i_2)$ sei ein anderes Modell von K_{P_1}.
Es gelte dort (zusätzlich zu $M2_{K_{P_0}}$):
$i_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, i_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0_2 \\ 0_2, & x = 0_2 \end{cases}.$
Dann gilt: $\Phi : \mathbb{R}_{10} \to \mathbb{R}_2$ ist ein Isomorphismus von $M1_{K_{P_1}}$ nach $M2_{K_{P_1}}$

3.4 Vergleich Körper - Pseudokörper

Die Menge der Beweise eines Körpers stimmen nicht mit der Menge der Beweise des Pseudokörpers überein, da das Funktionssymbol i nicht im Körper vorkommt und es auch keine S-Definition gibt, die das i in die Sprache des Körpers übersetzt.
Wenn der Körper und der Pseudokörper das „Gleiche“formalisieren würden, sollte ein Isomorphismus von einem Modell eines Körpers nach einem anderen Modell eines Körpers auch für den Pseudokörper gelten. Dies ist aber nicht der Fall (siehe oben).

4 Probleme bei der Division

4.1 Version 1: Einführung einer mangelhaften Division

Durch die Hinzunahme des Symbols / und eines Axioms, kann man den Körper erweitern:
$S_{M1} := \{+, -, \circ, /, 0, 1\}$
und ein Axiome hinzufügen und definieren:
$K_{M1} := K \cup \{\forall z \forall n \forall y (z/n \equiv y \leftrightarrow z \equiv n \circ y)\}$

4.1.1 Behauptungen

4.1.1.1 Behauptung1

K_{M1} ist wv (widerspruchsvoll)

Beweis:
$K_{M1} \vdash \forall z \forall n \forall y (z/n \equiv y \leftrightarrow z \equiv n \circ y)$, also:
$K_{M1} \vdash (z/n \equiv y \leftrightarrow z \equiv n \circ y)$, (xx) also
(Substituiere in (xx) z durch 0, n durch 0, y durch 0):
$K_{M1} \vdash (0/0 \equiv 0 \leftrightarrow 0 \equiv 0 \circ 0)$, also
$K_{M1} \vdash (0/0 \equiv 0)$
Substituiere in (xx) z durch 0, n durch 0, y durch 1):
$K_{M1} \vdash (0/0 \equiv 1 \leftrightarrow 0 \equiv 0 \circ 1)$, also
$K_{M1} \vdash (0/0 \equiv 1)$, also
$K_{M1} \vdash (0/0 \equiv 0 \wedge 0/0 \equiv 1)$, also
$K_{M1} \vdash (0 \equiv 1)$,
Es gilt aber auch (in Körpern):
$K_{M1} \vdash (0 \not\equiv 1)$, also
$K_{M1} \vdash (0 \not\equiv 1 \wedge 0 \equiv 1)$, also
K_{M1} wv

4.1.1.2 Behauptung2

Für beliebige S'-Formeln α gilt:
$K_{M1} \vdash \alpha$

4.1.2 Eigenschaften dieser Division

Nach einer Definition (Ebbinghaus: Einführung in die mathematische Logik) gilt:
$\forall z \forall n \forall y (z/n \equiv y \leftrightarrow z \equiv n \circ y)$ ist eine S-Definition von / in K
gdw
$/ \notin S$ ist ein 2-stelliges Funktionssymbol und K ist eine Menge von S-Sätzen und $z \equiv n \circ y$ ist ein S-Ausdruck und $K \vdash \forall z \forall n \exists! y (z \equiv n \circ y)$

Da aber gilt :
Nicht $K \vdash \forall z \forall n \exists! y (z \equiv n \circ y)$, folgt: $\forall z \forall n \forall y (z/n \equiv y \leftrightarrow (z \equiv n \circ y))$ ist keine S-Definition von / in K

Es ist also nicht mehr garantiert, dass sich durch die Hinzunahme des Symbols / die Menge der beweisbaren Sätze nicht verändert. Nach obiger Behauptung hat sich die die Menge der beweisbaren Sätze in K_{M1} gewaltig verändert, da K_{M1} wv.

4.1.2.1 Eine mögliche Folgerung

Da die Garantie fehlt, dass sich die Menge der beweisbaren Sätze verändert, könnte man auf die Idee kommen, Ausdrücke mit dieser Division als sinnlos zu bezeichnen:
In einem formalen System gibt es aus rein technischen Gründen keine sinnlosen Symbole. Alles, was syntaktisch in Ordnung ist, muss technisch einen Sinn ergeben.
Aber eine S-Definition dient nicht dazu, irgendein formales System zu schaffen, sondern dazu, ein vorhandenes System mit Abkürzungen auszustatten.
Mit der Einführung von „/“in K_{M1} hat man zwar ein formales System geschaffen, aber dieses System kann man nicht als „K mit einer Abkürzung für die Division“verstehen. In diesem Sinne ist die Definition von „/“sinnlos.

4.2 Version 2: Einführung einer mangelhaften Division

Durch die Hinzunahme des Symbols / und eines Axioms, kann man den Körper erweitern:
$S_{M2} := \{+, -, \circ, /, 0, 1\}$
und ein Axiome hinzufügen und definieren:
$K_{M2} := K \cup \{\forall z \forall n \forall y (z/n \equiv y \leftrightarrow n \not\equiv 0 \rightarrow z \equiv n \circ y)\}$

4.2.1 Behauptungen

4.2.1.1 Behauptung1

K_{M2} ist wv (widerspruchsvoll)

Beweis:
$K_{M2} \vdash \forall z \forall n \forall y (z/n \equiv y \leftrightarrow n \not\equiv 0 \rightarrow z \equiv n \circ y)$, also:
$K_{M2} \vdash (z/n \equiv y \leftrightarrow n \not\equiv 0 \rightarrow z \equiv n \circ y)$, (xx) also
(Substituiere in (xx) z durch 0, n durch 0, y durch 0):
$K_{M2} \vdash (0/0 \equiv 0 \leftrightarrow 0 \not\equiv 0 \rightarrow 0 \equiv 0 \circ 0)$, also
$K_{M2} \vdash (0/0 \equiv 0)$
Substituiere in (xx) z durch 0, n durch 0, y durch 1):
$K_{M2} \vdash (0/0 \equiv 1 \leftrightarrow 0 \not\equiv 0 \rightarrow 0 \equiv 0 \circ 1)$, also
$K_{M2} \vdash (0/0 \equiv 1)$, also
$K_{M2} \vdash (0/0 \equiv 0 \wedge 0/0 \equiv 1)$, also
$K_{M2} \vdash (0 \equiv 1)$,
Es gilt aber auch (in Körpern):
$K_{M2} \vdash (0 \not\equiv 1)$, also
$K_{M2} \vdash (0 \not\equiv 1 \wedge 0 \equiv 1)$, also
K_{M2} wv

4.2.1.2 Behauptung2

Für beliebige S'-Formeln α gilt:
$K_{M2} \vdash \alpha$

4.2.2 Eigenschaften dieser Division

Nach einer Definition (Ebbinghaus: Einführung in die mathematische Logik) gilt:
$\forall z \forall n \forall y (z/n \equiv y \leftrightarrow n \not\equiv 0 \rightarrow z \equiv n \circ y)$ ist eine S-Definition von / in K
gdw
$/ \notin S$ ist ein 2-stelliges Funktionssymbol und K ist eine Menge von S-Sätzen und $n \not\equiv 0 \rightarrow z \equiv n \circ y$ ist ein S-Ausdruck und $K \vdash \forall z \forall n \exists! y (n \not\equiv 0 \rightarrow z \equiv n \circ y)$

Da aber gilt :
Nicht $K \vdash \forall z \forall n \exists! y (n \not\equiv 0 \rightarrow z \equiv n \circ y)$, folgt: $\forall z \forall n \forall y (z/n \equiv y \leftrightarrow n \not\equiv 0 \rightarrow z \equiv n \circ y)$ ist keine S-Definition von / in K

Es ist also nicht mehr garantiert, dass sich durch die Hinzunahme des Symbols / die Menge der beweisbaren Sätze nicht verändert. Nach obiger Behauptung hat sich die die Menge der beweisbaren Sätze in K_{M2} gewaltig verändert, da K_{M2} wv.

4.3 Einführung einer besseren Division

„Bessere Division“, weil diese Division durch eine S-Definition eingeführt wird:

4.3.1 S-Definition

Durch eine S-Definitions kann man den Körper durch das Symbol / erweitern:
$S_{B1} = S \cup \{/\}$
$K_{B1} := K \cup \{\forall z \forall n \forall y (z/n \equiv y \leftrightarrow (n \neq 0 \rightarrow z \equiv n \circ y) \wedge (n \equiv 0 \rightarrow y \equiv 0))\}$

Behauptung:
$\forall z \forall n \forall y (z/n \equiv y \leftrightarrow (n \neq 0 \rightarrow z \equiv n \circ y) \wedge (n \equiv 0 \rightarrow y \equiv 0))$ ist eine S-Definition von / in K
Beweis:
$/ \notin S$ ist ein 2-stelliges Funktionssymbol und K ist eine Menge von S-Sätzen und $(n \neq 0 \rightarrow z \equiv n \circ y) \wedge (n \equiv 0 \rightarrow y \equiv 0)$ ist ein S-Ausdruck und $K \vdash \forall z \forall n \exists! y (n \neq 0 \rightarrow z \equiv n \circ y) \wedge (n \equiv 0 \rightarrow y \equiv 0)$

Durch diese S-Definition wird garantiert, dass sich die Menge der beweisbaren Sätze nicht durch die Hinzunahme des Symbols / verändert.

4.3.2 Bemerkung

Statt $(n \neq 0 \rightarrow z \equiv n \circ y) \wedge (n \equiv 0 \rightarrow y \equiv 0)$ könnte man auch einen anderen Wert im Fall n=0 wählen, wie z.B:
$(n \neq 0 \rightarrow z \equiv n \circ y) \wedge (n \equiv 0 \rightarrow y \equiv 1)$

4.3.3 Behauptungen

Gelten die folgenden Behauptungen und wie kann man sie zeigen?
$K_{B1} \vdash \forall z \ (z/0 \equiv 0)$
$K_{B1} \vdash \forall z \ (z/0 \neq 1)$
Nicht $K_{B1} \vdash \forall z \ (z/0 \equiv 1)$
Nicht $K_{B1} \vdash \forall z \ (z/0 \neq 0)$

4.4 Einführung einer weiteren besseren Division

$\forall z \, \forall n \, \forall y \, (z/n \equiv y \leftrightarrow y \equiv z \circ i(n))$

4.4.1 S-Definition

Durch eine S-Definitions kann man den Pseudokörper K^P durch das Symbol / erweitern:
$S_{P_2} := S_{P_1} \cup \{/\}$
$K_{P_2} := K_{P_1} \cup \{\forall z \, \forall n \, \forall y \, (z/n \equiv y \leftrightarrow y \equiv z \circ i(n))\}$

Behauptung:
$\forall z \, \forall n \, \forall y \, (z/n \equiv y \leftrightarrow y \equiv z \circ i(n))$ ist eine S-Definition von / in K

4.4.2 Behauptungen

Für die Körper $B \in \{K_{M1}, K_{M2}, K_{B1}, K_{P1}, K_{P2}\}$gilt:
B1) $B \vdash \forall x \ (x/0 \equiv x/0)$
B2) $B \vdash \forall x \ (x/0 \equiv x/0)$

B3) $B \vdash i(0) \equiv i(0)$
B4) $B \vdash \exists x\ i(0) \equiv x$
B5) $B \vdash \forall x \exists y\ x/0 \equiv y$
B6) $B \vdash \forall x \exists y\ x/0 \equiv y$
B7) $K \vdash \forall x\ (x/0 \equiv x/0)$ ist sinnlos

Beweis:
Beweisidee für B1) bis B3):
Lemma 2
Beweisidee für B4):
Lemma 1
$\Sigma \vdash \exists x\ (T \equiv x)$
B5) + B6)
Lemma 1 und dann vordere Generalisierung (Gv)
B7)
ist sinnlos, da in K kein Symbol / existiert.

5 ZFC-Definitionserweiterungen

5.1 S-Definition

$S := \{\in\}$ ist die Symbolmenge der ZFC-Axiome (Buch Ebbinghaus)
$S' := \{\in, \emptyset\}\}$ sei die Symbolmenge von ZFC':
$ZFC' := ZFC \cup \{\forall y(\emptyset = y \leftrightarrow \forall z\,(z \notin y)\}$
Behauptung:
$\forall y(\emptyset = y \leftrightarrow \forall z\,(z \notin y)$ eine $\{\in\}$-Definition von $\emptyset$ in ZFC.
Beweis:
$ZFC \vdash \exists! y \forall z(z \notin y)$ Durch diese S-Definition wird garantiert, dass sich die Menge der beweisbaren Sätze nicht durch die Hinzunahme des Symbols $\emptyset$ verändert.

5.2 Keine S-Definition

$L^* := \{\in, \emptyset, \{z \mid z \equiv z\}\}$ sei die Symbolmenge von ZFC^*:
$ZFC^* := ZFC' \cup \{\forall y(\{z \mid z \equiv z\} = y \leftrightarrow \forall z\,(z \in y \leftrightarrow z \equiv z))\}$
Allerdings ist:
$\forall y(\{z \mid z \equiv z\} = y \leftrightarrow \forall z\,(z \in y \leftrightarrow z \equiv z))$ keine $\{\in, \emptyset, \{z \mid z \equiv z\}\}$-Definition von $\{z \mid z \equiv z\}$ in ZFC'.
Deshalb ist nicht mehr garantiert, dass sich durch die Hinzunahme des Symbols $\{z \mid z \equiv z\}\}$ die Menge der beweisbaren Sätze nicht verändert. Im Gegenteil, die Menge der beweisbaren Sätze wird sehr „groß“:

5.2.1 Behauptung:

ZFC^* ist wv (widerspruchsvoll)

Beweis:
Fall1: ZFC ist wv
dann ist ZFC^* auch wv

Fall2: ZFC ist wfr (widerspruchsfrei)
Es gilt:
$ZFC^* \vdash \forall y(\{z \mid z \equiv z\} \equiv y \leftrightarrow \forall z\,(z \in y \leftrightarrow z \equiv z))$ also
$ZFC^* \vdash \forall y(\{z \mid z \equiv z\} \equiv y \leftrightarrow \forall z\,(z \in y))$ also
$ZFC^* \vdash (\{z \mid z \equiv z\} \equiv y \leftrightarrow \forall z\,(z \in y))$ substituiere y durch $\{z \mid z \equiv z\}$
$ZFC^* \vdash (\{z \mid z \equiv z\} \equiv \{z \mid z \equiv z\} \leftrightarrow \forall z\,(z \in \{z \mid z \equiv z\}))$ also
$ZFC^* \vdash \forall z\,(z \in \{z \mid z \equiv z\}))$ also mit Leibnitzsches Ersetzbarkeitstheorem
$ZFC^* \vdash y \equiv \{z \mid z \equiv z\} \rightarrow (\forall z\,(z \in \{z \mid z \equiv z\}) \leftrightarrow \forall z\,(z \in y))$ also
$ZFC^* \vdash y \equiv \{z \mid z \equiv z\} \rightarrow \forall z\,(z \in y)$ also Ph (hintere Partikularisierung)
$ZFC^* \vdash\equiv \{z \mid z \equiv z\} \rightarrow \exists y \forall z\,(z \in y)$ also Pv (vordere Partikularisierung)
$ZFC^* \vdash \exists y(y \equiv \{z \mid z \equiv z\}) \rightarrow \exists y \forall z\,(z \in y)$ da für einen beliebigen L-Term T gilt: $\Sigma \vdash \exists x\,(T \equiv x)$
$ZFC^* \vdash \exists y \forall z\,(z \in y)$
Es gilt außerdem (es gibt keine Allmenge):
$ZFC^* \vdash \neg\exists y \forall z(z \in y)$ also
ZFC^* ist wv

5.2.2 Eine mögliche Folgerung

Da sich gezeigt hat, dass sich die Menge der beweisbaren Sätze verändert hat, könnte man auf die Idee kommen, Ausdrücke mit dieser Division als sinnlos zu bezeichnen.