Notwendige bzw. hinreichende Kriterien für strenge, relative Extrempunkte (d.h. Tiefpunkte, Hochpunkte) aus der Schulmathematik
und
der Zusammenhang mit Wendepunkten.

Feedback an:

carlox@web.de

10. Mai 2024

Inhaltsverzeichnis

1 Kurze, zeitsparende Zusammenfassung

Den Sinn dieser Ausarbeitung wird hier in Kurzform (und deswegen nicht in mathematisch exakter Darstellung) vorgestellt:

Im Allgemeinen gilt nicht:
A1)
E strenges Extremum an $x_0 \Longleftrightarrow$ VZW von f' an x_0 und $f'(x_0) = 0$

Ebenso gilt Im Allgemeinen nicht:
A2)
Wenn P ein Punkt mit waagrechter Tangente ist, dann ist P entweder ein Wendepunkt oder ein strenges Extremum.

In diesem Dokument werden einfache Bedingungen angegeben (die nicht viel "kosten") unter denen die obigen Aussagen A1) und A2) für sogenannte "gutartige Schulfunktionen"gelten.
Damit haben die Schüler Werkzeuge (einen Algorithmus siehe Ende des Dokuments), mit denen sie angemessen argumentieren können.

2 Einführung, Überblick, Motivation

In der Oberstufenmathematik gibt es auf dem Gebiet der Extremwertaufgaben einen weißen Fleck auf der Landkarte:
Für ein strenges, relatives Extremum (Hochpunkt oder Tiefpunkt) einer reellwertigen Funktion f
an einer Stelle x_E mit waagrechter Tangente gibt es leider nur ein hinreichendes Kriterium.
(zumindest ist mir diesbezüglich kein entsprechendes Schulbuch bekannt).
Aus dem Vorzeichenwechsel (VZW) von f' an der Stelle x_E folgt ein strenges, relatives Extremum an dieser Stelle.
(Dass diese Eigenschaft nicht notwendig ist, sieht man an einem Gegenbeispiel weiter unten.)

Das bedeutet, dass man zwar z.B. von der Funktion f mit
$f(x) = x^4$
an der Stelle $x_E = 0$ auf ein strenges, relatives Extremum schliessen kann.
Begründung:
An dieser Stelle macht die Ableitungsfunktion f mit $f'(x) = 4x^3$ einen VZW.

Allerdings funktioniert eine ähnliche Überlegung (zur Nichtexistenz eines strengen, relativen Extremums) folgender Funktion nicht mehr:
$g(x) = x^3$
Begründung:
Weil nämlich $g'(x) = 3x^2$ an der Stelle $x_E = 0$ keinen VZW macht, kann man nicht folgern,
dass g an dieser Stelle kein strenges, relatives Extremum hat.
Man kann jetzt zwar noch mit dem Wendepunkt argumentieren:
g hat an $x_E = 0$ eine Wendestelle und deshalb kein Extremum.
Allerdings hilft dieses Argument nicht in den Fällen weiter, wo dort kein Wendepunkt ist.
Man wäre also in diesen Fällen mit seinem „schulmathematischem Latein“ am Ende.

In diesem Dokument wird überlegt, wie man zu möglichst geringen ”Kosten”(große Kosten wären z.B. die Voraussetzung, dass f ein Polynom ist) mit dem VZW ein notwendiges und hinreichendes Kriterium bekommt, das ohne Wendestellen argumentiert (die ein Schüler auch erst berechnen muss !). Zusätzlich wird auch noch überlegt, wie man zu möglichst geringen „Kosten“ noch mit einer existierenden (bzw. fehlenden) Wendestelle argumentieren kann.

U.a. wird bewiesen, dass endlich viele Stellen mit waagrechter Tangente eine wesentliche Rolle spielen.

Außerdem wird gezeigt, dass quasi “kostenlos“ (d.h. nur Differenzierbarkeit vorausgesetzt), aus der Vorzeichentreue der Ableitungsfunktion f' an der Stelle x_E (d.h. f' wechselt an x_E nicht das Vorzeichen) dort die Nichtexistenz eines strengen, relativen Extremums folgt.

Die notwendigen bzw. hinreichenden Kriterien der in diesem Dokument entwickelten Sätze für strenge, relative Extrema sind in Satz 1, Satz 2 und Satz 3 hinterlegt:

Siehe dazu Satz1 in 4.5 auf Seite 11,
Siehe dazu Satz2 in 4.6 auf Seite 13,
Siehe dazu Satz3 in 4.7 auf Seite 14.

Satz 1 bis Satz 4 können gleich nachgeschlagen werden (die Kapitel davor sind zum groben Verständnis „in the first run“ erst mal nicht erforderlich) und können auf das Beispiel 2.2 auf Seite 5 unten (aber nicht auf das folgende Gegenbeispiel) angewendet werden.

2.1 Gegenbeispiel

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x^2\left(2+\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Man kann zeigen:
f ist differenzierbar auf $\mathbb{R}$ mit $f'(0) = 0$ und $T(0|0)$ ist ein strenges, relatives Extremum (Tiefpunkt).
Aber f' macht an $x_T = 0$ keinen VZW, was im Folgenden gezeigt wird.

Für die Ableitung f' folgt:

$$f'\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f'(x) = \begin{cases} 4x + 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - cos\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Sei $(0, d)$ ein echtes, offenes Intervall rechts von $T(0|0)$.
$f'(x) = 4x + 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - cos\left(\frac{1}{x}\right)$ für $x \neq 0$

Sei $(0, d)$ ein echtes, offenes Intervall rechts von $T(0|0)$.
Definiere die Folgen $(x_n) = x_1, x_2, \cdots$ und $(z_n) = z_1, z_2, \cdots$ mit:
$x_n := \frac{1}{2n\pi}$ und $z_n := \frac{1}{(2n+1)\pi}$
Dann gilt:
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$ und
$\lim\limits_{n\to\infty} f'(x_n) = -1$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f'(z_n) = 1$
Da $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ gibt es ein n_0, so daß für alle $n > n_0$ gilt $x_n \in (0, d)$.
Da $\lim\limits_{n\to\infty} f'(x_n) = -1$ gibt es ein m_0, so daß für alle $n > m_0$ gilt $f'(x_n) < 0$.
Also gilt für alle $n > N_0 := max(n_0, m_0)$ $x_n \in (0, d)$ und $f'(x_n) < 0$.
Analog folgt: Es gibt ein M, so dass für alle $n > M$ $z_n \in (0, d)$ und $f'(z_n) > 0$.
Also gibt es in diesem echten, offenen Intervall $(0, d)$ immer negative und positive Werte,
also auch in einem beliebigen, echten, offenen Intervall (c, d).
Also macht f' an der Stelle $x_T = 0$ keinen VZW und ist dort auch nicht vorzeichentreu.

Da f' unendlich viele Stellen mit waagrechter Tangente hat kann hier auch nicht mit
Satz 1 (siehe Abschnitt 4.5 auf Seite 11) argumentiert werden.
Da außerdem f' an $x_T = 0$ nicht vorzeichentreu ist, kann ebenfalls auch nicht mit
Satz 3 (siehe Abschnitt 4.7 argumentiert werden.

Bei solchen „pathologischen bzw. exotischen“Funktionen liegen also die Grenzen der Möglichkeiten der in diesem Dokument bewiesenen Sätze! Siehe auch das Fazit am Schluss dieses Dokuments.

2.2 Beispiel

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3$

Mit Hilfe einiger Sätze dieses Dokuments kann man nun zeigen, dass diese Funktion f keine strengen, relativen Extrema besitzt:

1) Argumentation mit Satz 1 (siehe Abschnitt 4.5 auf Seite 11):
Da f differenzierbar ist und die Ableitungsfunktion f' mit $f'(x) = 3x^2$ nur eine Stelle mit waagrechter Tangente hat (die Stelle $x_T = 0$) gibt es nur endlich viele Stellen mit waagrechter Tangente.
Da f' an dieser Stelle $x_T = 0$ keinen VZW macht, besitzt f an dieser Stelle kein strenges, relatives Extremum.
Da es keine weiteren Stellen mit waagrechter Tangente gibt, hat f deshalb nirgends ein strenges, relatives Extremum.

2) Argumentation mit Satz 3 (siehe Abschnitt 4.7 auf Seite 14):
Da f differenzierbar ist und die Ableitungsfunktion f' mit $f'(x) = 3x^2$ nur eine Stelle mit waagrechter Tangente hat (die Stelle $x_T = 0$) kann es nur maximal ein strenges, relatives Extremum geben.

Da aber f' an dieser Stelle vorzeichentreu ist (d.h. in einer Umgebung von x_T links und rechts von x_T die y-Werte von f' oberhalb der x-Achse liegen), besitzt f an dieser Stelle kein strenges, relatives Extremum und deshalb nirgends ein strenges, relatives Extremum.

3 Definitionen

3.1 Intervalle

1) Seien a und b reelle Zahlen.
Dann nennt man $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \, | a < x < b\}$ ein offenes Intervall.

2) Seien a und b reelle Zahlen.
Dann nennt man $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \, | a \leq x \leq b\}$ ein abgeschlossenes Intervall.

3) Seien a und b reelle Zahlen.
Ein offenes (a, b) oder abgeschlossenes Intervall $[a, b]$ ist echt genau dann wenn $a < b$.

3.2 Strenges, relatives Extremum

1) Eine auf einem echten, abgeschlossenen oder offenen Intervall I definierte reellwertige Funktion f hat an der Stelle $x_E \in I$ ein strenges, relatives Minimum (Tiefpunkt) $: \Longleftrightarrow$
Es existiert ein echtes, offenes Intervall $(x_E - d, x_E + d) \subset I$ so dass
für alle $x \in (x_E - d, x_E + d) \setminus \{x_E\}$ gilt: $f(x_E) < f(x)$

2) Eine auf einem echten, abgeschlossenen oder offenen Intervall I definierte reellwertige Funktion f hat an der Stelle $x_E \in I$ ein strenges, relatives Maximum (Hochpunkt) $: \Longleftrightarrow$
Es existiert ein echtes, offenes Intervall $(x_E - d, x_E + d) \subset I$ so dass
für alle $x \in (x_E - d, x_E + d) \setminus \{x_E\}$ gilt: $f(x_E) > f(x)$

3) Eine auf einem echten, abgeschlossenen oder offenen Intervall I definierte reellwertige Funktion f hat an der Stelle $x_E \in I$ ein strenges, relatives Extremum (strenges, lokales Extremum) $: \Longleftrightarrow$
f hat an der Stelle x_E ein strenges, relatives Minimum oder ein strenges, relatives Maximum

3.3 Relatives Extremum

Analog dem strengen, relativem Extremum, nur dass $>$ bzw. $<$ durch $\geq$ bzw. $\leq$ ersetzt wird.
Dieses relative Extremum wird im Extremum-Monotonie-Lemma 4.2 auf Seite 10 gebraucht.

3.4 Definition Wendestelle

Eine auf einem echten, offenen Intervall I definierte reellwertige, mindestens 2-mal differenzierbare Funktion f hat an der Stelle $x_W \in I$ eine Wendestelle $: \Longleftrightarrow$
f" macht an x_W einen VZW und $f''(x_W) = 0$.

Bemerkung:
Der zur Wendestelle zugehörige Punkt heißt Wendepunkt.

3.5 Definition VZW (Vorzeichenwechsel)

1) Eine auf einem echten, abgeschlossenen oder offenen Intervall I definierte reellwertige Funktion f macht an der Stelle $x_V \in I$ einen VZW von - nach + : $\Longleftrightarrow$
Es existiert ein echtes, offenes Intervall $(x_V - d, x_V + d) \subset I$ so dass
für alle $x \in (x_V - d, x_V)$ gilt: $f(x) < 0$ und
für alle $x \in (x_V, x_V + d)$ gilt: $f(x) > 0$

2) Eine auf einem echten, abgeschlossenen oder offenen Intervall I definierte reellwertige Funktion f macht an der Stelle $x_V \in I$ einen VZW von + nach - : $\Longleftrightarrow$
Es existiert ein echtes, offenes Intervall $(x_V - d, x_V + d) \subset I$ so dass
für alle $x \in (x_V - d, x_V)$ gilt: $f(x) > 0$ und
für alle $x \in (x_V, x_V + d)$ gilt: $f(x) < 0$

3) Eine auf einem echten, abgeschlossenen oder offenen Intervall I definierte reellwertige Funktion f macht an der Stelle $x_V \in I$ einen VZW: $\Longleftrightarrow$
f macht an der Stelle x_V einen VZW von - nach + oder
f macht an der Stelle x_V einen VZW von + nach -

3.6 Definition VZT (streng vorzeichentreu)

1) Eine auf einem echten, abgeschlossenen oder offenen Intervall I definierte reellwertige Funktion f ist an der Stelle $x_V \in I$ streng positiv vorzeichentreu (SPVZT) : $\Longleftrightarrow$
Es existiert ein echtes, offenes Intervall $(x_V - d, x_V + d) \subset I$ so dass
für alle $x \in (x_V - d, x_V + d) \setminus \{x_E\}$ gilt: $f(x) > 0$ und $f(x_V) = 0)$

2) Eine auf einem echten, abgeschlossenen oder offenen Intervall I definierte reellwertige Funktion f ist an der Stelle $x_V \in I$ streng negativ vorzeichentreu (SNVZT) : $\Longleftrightarrow$
Es existiert ein echtes, offenes Intervall $(x_V - d, x_V + d) \subset I$ so dass
für alle $x \in (x_V - d, x_V + d) \setminus \{x_E\}$ gilt: $f(x) < 0$ und $f(x_V) = 0)$

3) Eine auf einem echten, abgeschlossenen oder offenen Intervall I definierte reellwertige Funktion f ist an der Stelle $x_V \in I$ streng vorzeichentreu (VZT) : $\Longleftrightarrow$
f ist an der Stelle x_V streng positiv vorzeichentreu (SPVZT) oder
f ist an der Stelle x_V streng negativ vorzeichentreu (SNVZT)

3.7 Bemerkung: Zusammenhang VZT und VZW

Sei f eine auf einem echten, abgeschlossenen oder offenen Intervall I definierte reellwertige Funktion und $x_V \in I$. Dann gilt:
f macht an der Stelle x_V einen VZW $\Longrightarrow$ f ist an der Stelle x_V nicht VZT

3.8 Bemerkung: Zusammenhang VZT und relatives Extremum

Sei f eine auf einem echten, abgeschlossenen oder offenen Intervall I definierte reellwertige Funktion und $x_V \in I$. Dann gilt:
f ist an der Stelle x_V VZT $\Longrightarrow$ f hat an der Stelle x_V ein strenges, relatives Extremum

4 Sätze und Lemmata

4.1 Bekannte Lemmata aus der Analysis

4.1.1 Monotonie und Ableitung

Es sei f eine auf einem echten, offenen Intervall (a, b) differenzierbare Funktion.
Dann gelten folgende Behauptungen:

1) $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a, b) \implies$ f wächst in (a, b) streng monoton.

2) $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a, b) \iff$ f wächst in (a, b) monoton.

3) $f'(x) < 0$ für alle $x \in (a, b) \implies$ f fällt in (a, b) streng monoton.

4) $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in (a, b) \iff$ f fällt in (a, b) monoton.

4.1.2 VZW und Stetigkeit

Es sei f eine auf einem echten, abgeschlossenen oder offenen Intervall stetige Funktion.
Dann gelten folgende Behauptungen:

1) f macht an der Stelle x_V einen VZW $\iff$
f macht an der Stelle x_V einen VZW und $f(x_V) = 0$

2) f macht an der Stelle x_V einen VZW von - nach + $\iff$
f macht an der Stelle x_V einen VZW von - nach + und $f(x_V) = 0$

3) f macht an der Stelle x_V einen VZW von + nach - $\iff$
f macht an der Stelle x_V einen VZW von + nach - und $f(x_V) = 0$

4.1.3 Notwendiges Kriterium für ein relatives Extremum

Es sei f eine auf einem echten, offenen Intervall (a, b) differenzierbare Funktion und $x_0 \in (a, b)$.
Dann gilt folgende Behauptung:
f hat an x_0 ein relatives Extremum $\implies f'(x_0) = 0$

4.1.4 Grenzwert-Lemma

Sei (a_n) in $\mathbb{R}$ eine konvergente Folge mit mit $a_n > a$ für alle n. Dann gilt:
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n \geq a$

4.1.5 Satz von Darbout

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf (a, b) und stetig auf $[a, b]$ mit $a < b$
Wenn für ein $c \in \mathbb{R}$ gilt: $f'(a) < c < f'(b)$,
dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit: $f'(\xi) = c$

Bemerkung:
Mit dem Satz von Darbout kann man den Satz 1 (siehe unten) auf eine alternative Art beweisen.

4.2 Extremum-Monotonie-Lemma

Es sei f eine auf einem echten, offenen Intervall (a,b) **stetige** Funktion. Dann gilt:
f hat keine relativen Extrema in $(a,b) \implies$
f ist entweder monoton steigend auf (a,b) oder f ist monoton fallend auf (a,b)

Beweis: (indirekt)
Sei nicht (f ist entweder monoton steigend auf (a,b) oder f ist monoton fallend auf (a,b)).
Also ist f in (a,b) nicht monoton. Dann gibt es in (a,b) die Stellen x_1, x_2, x_3 mit
$a < x_1 < x_2 < x_3 < b$, wobei $f(x_1), f(x_2), f(x_3)$ nicht geordnet sind, d.h. es gilt weder:
$f(x_1) \leq f(x_2) \leq f(x_3)$ noch $f(x_1) \geq f(x_2) \geq f(x_3)$
Wenn die Folge $(f(x_1), f(x_2), f(x_3))$ nicht monoton fallend oder monoton steigend geordnet ist, dann gibt es also 2 Fälle:
$f(x_1) < f(x_2) > f(x_3)$ oder $f(x_1) > f(x_2) < f(x_3)$
Nach dem Satz vom Maximum und Minimum nimmt jede stetige Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall $[x_1, x_3]$ ein Maximum und Minimum an.
Da $f(x_1) < f(x_2) > f(x_3)$ oder $f(x_1) > f(x_2) < f(x_3)$ kann sich also das Maximum und das Minimum nicht an einem der 2 Ränder x_1 oder x_3 befinden.
Also muss sich das Maximum und das Minimum in (x_1, x_3) befinden.
Also gibt es ein relatives Extremum in (x_1, x_3) .
Da $(x_1, x_3) \subset (a,b)$, gibt es also ein relatives Extremum in (a,b). □

4.3 Tiefpunkt-Monotonie-Lemma

Es sei f eine auf einem echten, offenen Intervall (a,b) **stetige** Funktion, die dort einen Tiefpunkt $T(x_T, f(x_T))$ mit $x_T \in (a,b)$ besitzt. Dann gelten folgende Behauptungen:

B1)
Auf allen echten, offenen Intervallen $(x_T, c) \subset (x_T, b)$ ist f nicht streng monoton fallend auf (x_T, c).

B2)
Auf allen echten, offenen Intervallen $(c, x_T) \subset (a, x_T)]$ ist f nicht streng monoton steigend auf (c, x_T).

Bemerkung: Analog gilt dann das Hochpunkt-Monotonie-Lemma

Beweis (durch Widerspruch):
B1)
Es sei f eine auf einem echten, offenen Intervall (a,b) definierte reellwertige, stetige Funktion und $T(x_T, f(x_T))$ ist Tiefpunkt (strenges, relatives Minimum) mit $x_T \in (a,b)$ und es sei $(x_T, x_T + d)$ ein echtes, offenes Intervall $\subset (a,b)$, auf dem f streng monoton fallend ist und $f(x) \geq f(x_T)$ für alle $x \in (x_T, x_T + d)$.
Ziel:
Konstruiere eine Folge $(x_1, x_2, x_3, ..)$ mit $x_n := x_T + d/n$
und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_T$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(x_T)$

Es gilt:
Da f streng monoton fallend und x_T Tiefpunktstelle ist, gilt für alle $n \geq 3$:
$f(x_T + d/n) > f(x_T + d/2) > f(x_T)$, also (nach Lemma 4.1.4 auf Seite 9)
$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_T + \frac{d}{n}) \geq f(x_T + d/2) > f(x_T)$, also
$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_T + \frac{d}{n}) > f(x_T)$, also
$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_T + \frac{d}{n}) \neq f(x_T)$, also
f ist unstetig an x_T, also Widerspruch zur Voraussetzung.

B2)
geht analog zu B1) □

4.4 VZT - VZW - Lemma

Es sei f eine auf einem echten, offenen Intervall (a, b) **stetig differenzierbare** Funktion, die dort **endlich** viele Stellen mit waagrechter Tangente besitzt und $x_W \in (a, b)$ eine Stelle mit waagrechter Tangente.
Dann gilt:
An der Stelle x_W macht f' entweder einen VZW oder ist VZT.

Beweis:
Da es innerhalb von (a, b) nur endlich viele Stellen mit waagrechter Tangente gibt, gibt es zu jeder derartigen Stelle x_W ein „linkes“ echtes, offenes Intervall (hier linke Umgebung genannt) $U_L := (x_L, x_W) \subset (a, b)$ und ein „rechtes“ echtes, offenes Intervall (hier rechte Umgebung genannt) $U_R := (x_W, x_R) \subset (a, b)$, so dass in diesen Umgebungen keine weiteren Stellen mit waagrechter Tangente vorkommen.
In jeder dieser Umgebungen (U_L bzw. U_R) gilt dann für alle x aus dieser Umgebung (U_L bzw. U_R) entweder $f'(x) < 0$ oder $f'(x) > 0$.
Denn wenn es solche zwei Stellen a_1 und a_2 mit unterschiedlichen Vorzeichen von $f'(a_1)$ und $f'(a_2)$ in einer solcher Umgebungen (U_L bzw. U_R) gäbe, dann würde es nach dem Zwischenwertsatz einen Wert $a \in (a_1, a_2) \subset U_L$ bzw. U_R geben mit $f'(a) = 0$.
Dann hätte man in dieser Umgebung (U_L bzw. U_R) eine weitere Stelle mit waagrechter Tangente.
Dies steht im Widerspruch zur Konstruktion dieser Umgebungen.
Damit gibt es für die 2 Umgebungen U_L und U_R der Stelle x_W mit waagrechter Tangente zwei Möglichkeiten:
Entweder haben jeweils alle y-Werte (von f') der 2 Umgebungen U_L und U_R die gleichen Vorzeichen oder sie sind verschiedenen.
Also macht an allen Stellen x_W mit waagrechter Tangente f' entweder einen VZW oder ist VZT. □

4.5 Satz 1 (Äquivalenzkriterium für ein strenges, relatives Extremum)

Es sei f eine auf einem echten, offenen Intervall (a, b) **differenzierbare** Funktion, die dort **endlich** viele Stellen mit waagrechter Tangente besitzt und $x_T \in (a, b)$.
Dann gelten folgende Behauptungen:

B1)
$T(x_T|f(x_T))$ ist ein strenges, relatives Minimum in (a, b) $\iff$
f' macht an x_T einen VZW von - nach + und $f'(x_T) = 0$

B2)
$H(x_H|f(x_H))$ ist ein strenges, relatives Maximum in (a, b) $\iff$
f' macht an x_H einen VZW von + nach - und $f'(x_H) = 0$

B3)
$E(x_E|f(x_E))$ ist ein strenges, relatives Extremum in (a, b) $\iff$
f' macht an x_E einen VZW und $f'(x_E) = 0$ $\iff$
f' ist nicht VZT an x_E und $f'(x_E) = 0$

Beweis:
B1)
"$\Longleftarrow$"
Bekannt aus der Analysis

"$\Longrightarrow$"
(1) Sei $T := T(x_T|f(x_T))$ ein strenges, relatives Minimum der Funktion f.
Nach Lemma 4.1.3 auf Seite 9 folgt: $f'(x_T) = 0$.
Also gehört T zu einer der endlich vielen Stellen mit waagrechter Tangente.
Da es nur endlich viele Stellen mit waagrechter Tangente gibt, existiert rechts von T ein echtes, offenes Intervall $(x_T, x_R) \subset (a, b)$, so dass in diesem keine weiteren Stellen mit waagrechter Tangente vorkommen.
Also gilt für alle $x \in (x_T, x_R) : f'(x) \neq 0$
und deshalb hat nach Lemma 4.1.3 auf Seite 9 das echte, offene Intervall (x_T, x_R) kein relatives Extrema.

(2) Nach dem Tiefpunkt-Monotonie-Lemma (siehe Lemma 4.3 auf Seite 10) folgt:
f ist nicht streng monoton fallend auf (x_T, x_R).

(3) Nach dem Extremum-Monotonie-Lemma (siehe Lemma 4.2 auf Seite 10) ist
f in dem Intervall (x_T, x_R) monoton steigend oder monoton fallend.
Also gilt (siehe Lemma 5.4 auf Seite 16) und (1) oben in diesem Beweis:
$\{f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (x_T, x_R)$ oder $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in (x_T, x_R)\}$ und
$f'(x) \neq 0$ für alle $x \in (x_T, x_R)$
also:
$f'(x) > 0$ für alle $x \in (x_T, x_R)$ oder $f'(x) < 0$ für alle $x \in (x_T, x_R)$
Da nach 2) aber f nicht streng monoton fallend auf (x_T, x_R) ist, folgt:
nicht $f'(x) < 0$ für alle $x \in (x_T, x_R)$
Insgesamt folgt daraus:
$f'(x) > 0$ für alle $x \in (x_T, x_R)$

(4) Analog kann man folgern, daß es links von T ein echtes, offenes Intervall $(x_L, x_T) \subset (a, b)$ gibt,
so dass dort für alle x gilt: $f'(x) < 0$

(5) Zusammenfassend gilt damit:
für alle $x \in (x_L, x_T)$ gilt $f'(x) < 0$
für alle $x \in (x_T, x_R)$ gilt $f'(x) > 0$
also macht f' an x_T einen VZW von - nach +

B2)
analog zu B1)

B3)
folgt aus B1) und B2) $\square$

Ersetzt man „differenzierbar“ des letzten Satzes durch die stärkere Voraussetzung „stetig differenzierbar“, dann ergeben sich im folgenden Satz auch stärkere Behauptungen:

4.6 Satz 2 (Äquivalenzkriterium für ein strenges, relatives Extremum)

Es sei f eine auf einem echten, offenen Intervall (a, b) **stetig differenzierbare** Funktion, die dort **endlich** viele Stellen mit waagrechter Tangente besitzt und $x_T \in (a, b)$.
Dann gelten folgende Behauptungen:

B1)
$T(x_T|f(x_T))$ ist ein strenges, relatives Minimum in (a, b) $\iff$
f' macht an x_T einen VZW von - nach +

B2)
$H(x_H|f(x_H))$ ist ein strenges, relatives Maximum in (a, b) $\iff$
f' macht an x_H einen VZW von + nach -

B3)
$E(x_E|f(x_E))$ ist ein strenges, relatives Extremum in (a, b) $\iff$
f' macht an x_E einen VZW $\iff$
f' ist nicht VZT an x_E

Beweis:
B1)
Da f' stetig ist, gilt:
f' macht an x_E einen VZW von - nach + $\iff$ (nach Lemma 4.1.2 auf Seite 9)
f' macht an x_E einen VZW von - nach + und $f'(x_E) = 0$
Dann kann man vorigen Satz1 anwenden (nach Satz 4.5 auf Seite 11).

B2)
analog B1

B3)
Sei $E(x_E|f(x_E))$ ein strenges, relatives Extremum in (a, b) $\iff$ (nach Satz1)
f' macht an x_E einen VZW und $f'(x_E) = 0$ $\iff$ (nach Lemma 4.1.2 auf Seite 9)
f' macht an x_E einen VZW $\iff$ (nach VZT-VZW-Lemma 4.4 auf Seite 11)
f' ist nicht VZT an x_E $\square$

4.7 Satz 3 (hinreichendes Kriterium für kein strenges, relatives Extremum)

Es sei f eine auf einem echten, offenen Intervall (a, b) **differenzierbare** Funktion und $x_E \in (a, b)$.
Dann gilt:

f' ist VZT an $x_E \implies E(x_E|f(x_E))$ ist kein strenges, relatives Extremum in (a, b)

Beweis: (indirekt)
Es sei $E(x_E|f(x_E))$ ein strenges, relatives Extremum in (a, b)

Fall1:
$E(x_E|f(x_E))$ sei ein strenges, relatives Minimum (Tiefpunkt) $T(x_T|f(x_T))$
Sei $(x_T, x_T + d) \subset (a, b)$ ein echtes, offenes Intervall rechts von x_T.
Nach dem Tiefpunkt-Monotonie-Lemma (siehe Lemma 4.3 auf Seite 10) ist dann f darauf nicht streng monoton fallend.
Also (nach Definition der strengen Monotonie) gibt es ein $x_0 \in (x_T, x_T + d)$ mit $f'(x_0) \geq 0$.
Analoge Überlegungen für das zugehörige echte, offene Intervall $(x_T - d, x_T)$ ergeben, dass es ein $x_1 \in (x_T - d, x_T)$ gibt mit $f'(x_1) \leq 0$
Also ist f' nicht VZT.

Fall2:
$H(x_H|f(x_H))$ ist ein strenges, relatives Maximum (Hochpunkt) in (a, b)
folgt analog. □

5 Zusammenhang Extremum und Wendestelle

5.1 Korollar 1

Es sei f eine auf einem echten, offenen Intervall (a, b) **zweifach differenzierbare** Funktion und $x_0 \in (a, b)$
Dann gilt:
f hat an x_0 eine Wendestelle $\implies$ f hat an x_0 kein strenges, relatives Extremum.

Beweis:
Sei $x_W \in (a, b)$ eine Wendestelle. Dann gilt per Definition: $f''(x_0)$ macht einen VZW an x_W und $f''(x_0) = 0$.
Fall1: $f'(x_W) \neq 0$
Dann hat f hat an x_0 kein strenges, relatives Extremum.
Fall2: $f'(x_W) = 0$
Dann hat f' nach dem Extremwertkriterium kein strenges, relatives Extremum in $E(x_W|0)$.
Also ist f' VZT an x_W. Dann kann man vorigen Satz3 anwenden (nach Satz 4.7 auf Seite 14).
Aus diesem folgt: f hat an x_0 kein strenges, relatives Extremum.

Daraus folgt sofort:

5.2 Korollar 2

Es sei f eine auf einem echten, offenen Intervall (a, b) **zweifach differenzierbare** Funktion
Dann gilt:
f hat an keiner Stelle $x_0 \in (a, b)$ gleichzeitig eine Wendestelle und ein strenges, relatives Extremum.

5.3 Korollar3

Es gibt eine auf einem echten, offenen Intervall (a, b) **zweifach differenzierbare** Funktion,
die eine Stelle mit waagrechter Tangente besitzt und dort weder ein relatives Extremum noch eine Wendestelle hat.

Beweis:
Beispiel: $h(x) = x^4 \cdot \sin(\frac{1}{x})$

$$h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x) = \begin{cases} x^4 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

$h'(x) = 4x^3 \sin(\frac{1}{x}) - x^2 \cos(\frac{1}{x}) \quad$ für $x \neq 0$
$h''(x) = 12x^2 \sin(\frac{1}{x}) - 6x \cos(\frac{1}{x}) - \sin(\frac{1}{x}) \quad$ für $x \neq 0$
Es gilt:
$h'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x^4 \cdot \sin(\frac{1}{x}) - 0}{x - 0} = 0$ (also h' existiert auf $\mathbb{R}$)
und
$h''(0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{4x^3 \sin(\frac{1}{x}) - x^2 \cos(\frac{1}{x}) - 0}{x - 0} = 0$ (also h" existiert auf $\mathbb{R}$)

Es gilt außerdem:
1)
h” macht an der Stelle x=0 keinen VZW (also ist x=0 keine Wendestelle), denn:
Sei $(0, d)$ ein echtes, offenes Intervall.
Definiere die Folgen $(x_n) = x_1, x_2, \cdots$ und $(z_n) = z_1, z_2, \cdots$ mit:
$x_n := \frac{2}{(4n+1)\pi}$ und $z_n := \frac{2}{(4n+3)\pi}$
Dann gilt:
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$ und
$\lim\limits_{n\to\infty} h''(x_n) = -1$ und $\lim\limits_{n\to\infty} h''(z_n) = 1$
Da $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ gibt es ein n_0, so daß für alle $n > n_0$ gilt $x_n \in (0, d)$.
Da $\lim\limits_{n\to\infty} h''(x_n) = -1$ gibt es ein m_0, so daß für alle $n > m_0$ gilt $h''(x_n) < 0$.
Also gilt für alle $n > N_0 := max(n_0, m_0)$ $x_n \in (0, d)$ und $h''(x_n) < 0$.
Analog folgt: Es gibt ein M, so dass für alle $n > M$ $z_n \in (0, d)$ und $h''(z_n) > 0$.
Also liegen in $(0, d)$ h”-Werte größer 0 und kleiner 0.
Also macht h'' an der Stelle $x = 0$ keinen VZW.

2)
h hat an der Stelle x=0 kein strenges, relatives Extremum, denn:
Sei $(0, d)$ ein echtes, offenes Intervall.
Definiere die Folgen $(x_n) = x_1, x_2, \cdots$ und $(z_n) = z_1, z_2, \cdots$ mit:
$x_n := \frac{2}{(4n+1)\pi}$ und $z_n := \frac{2}{(4n+3)\pi}$
Dann gilt:
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$ und
$h(x_n) = x_n^4 \cdot 1 > 0$ für alle $n > 0$ und $h(z_n) = z_n^4 \cdot -1 < 0$ für alle $n > 0$ (*)
Da (x_n) Nullfolge existiert ein N mit $x_N < d$. Und wg. (*) folgt $h''(x_N) > 0$.
Da (z_n) Nullfolge existiert ein M mit $x_M < d$. Und wg. (*) folgt $h''(x_M) < 0$.
Also liegen in $(0, d)$ h-Werte größer 0 und kleiner 0.
Also hat h an der Stelle $x = 0$ kein strenges, relatives Extremum.

5.4 Satz 4

Es sei f eine auf einem echten, offenen Intervall (a, b) **zweifach differenzierbare** Funktion, die dort **endlich** viele Stellen mit waagrechter Tangente besitzt und $x_W \in (a, b)$ eine Stelle mit waagrechter Tangente.
Außerdem hat f’ in (a, b) nur endlich viele Stellen mit waagrechter Tangente.
Dann gilt:
f hat an x_W entweder ein relatives Extremum oder eine Wendestelle.

Beweis:
Nach dem VZT-VZW-Lemma 4.4 auf Seite 11) gibt es 2 sich ausschliessende Fälle:

Fall1: f’ macht an der Stelle x_W einen VZW
Dann hat f an x_W nach dem Extremwertkriterium (Satz1) ein relatives Extremum.

Fall2: f’ ist an der Stelle x_W VZT (vorzeichentreu).
Also hat f’ an der Stelle x_W ein relatives Extremum.
Also macht nach Satz1 (f’ hat nur endlich viele Stellen mit waagrechter Tangente)
die Funktion f’ einen VZW an x_W und es ist $f''(x_W) = 0$.
Also hat f an der Stelle x_W definitionsgemäß eine Wendestelle.

6 Weitere Bemerkungen

6.1 Die Ableitungen von $f(x) = e^{\frac{-1}{x^2}} \sin(\frac{1}{x})$

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{x^2}} \sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

Dann gilt:
Für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ existieren Polynome p_1 und p_2 so daß:
$f^{(n)}(x) == \begin{cases} \frac{e^{\frac{-1}{x^2}}}{x^{3n}}(p_1 \sin(\frac{1}{x}) + p_2 \cos(\frac{1}{x})), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

Beweis:
1) Wenn $h(x) = \frac{e^{\frac{-1}{x^2}}}{x^{3n}}$ für $x \neq 0$, dann gilt:
$h'(x) = \frac{e^{\frac{-1}{x^2}}}{x^{6n}}(2x^{3n-3} - 3n \cdot x^{3n-1}) = \frac{e^{\frac{-1}{x^2}}}{x^{3n+3}}(-3nx^2 + 2)$

2) Wenn $g(x) = p_1 \cdot \sin(\frac{1}{x}) + p_2 \cdot \cos(\frac{1}{x})$ für $x \neq 0$ dann gilt:
$g'(x) = p_1' \sin(\frac{1}{x}) - \frac{p_1}{x^2} \cos(\frac{1}{x}) + p_2' \cos(\frac{1}{x}) + \frac{p_2}{x^2} \sin(\frac{1}{x}) = \sin(\frac{1}{x})(p_1' + \frac{p_2}{x^2}) + \cos(\frac{1}{x})(p_2' - \frac{p_1}{x^2})$

3) Mit vollständiger Induktion
a) n=1:
$f'(x) = \frac{e^{\frac{-1}{x^2}}(2 \sin\frac{1}{x} - x \cos\frac{1}{x})}{x^3}$ für $x \neq 0$

b) Die Behauptung gelte für ein beliebiges $n > 0$.
Zeige:
Es existieren Polynome p_1 und p_2 so daß:
$f^{(n+1)}(x) = \frac{e^{\frac{-1}{x^2}}}{x^{3n+3}}(p_1 \sin(\frac{1}{x}) + p_2 \cos(\frac{1}{x}))$ für alle $n \in \mathbb{N} \wedge n > 0 \wedge x \neq 0$
Es gilt:
$f^{(n+1)}(x) = (f^n)'(x) =$
$\frac{e^{\frac{-1}{x^2}}}{x^{3n+3}}(2 - 3nx^2) \cdot (p_1 \sin(\frac{1}{x}) + p_2 \cos(\frac{1}{x})) - \frac{e^{\frac{-1}{x^2}}}{x^{3n}}(\sin(\frac{1}{x})(p_1' + \frac{p_2}{x^2}) + \cos(\frac{1}{x})(p_2' - \frac{p_1}{x^2}) =$
$\frac{e^{\frac{-1}{x^2}}}{x^{3n+3}} \cdot ((2p_1 - 3nx^2 p_1) \sin(\frac{1}{x}) + (2p_2 - 3nx^2 p_2) \cos(\frac{1}{x}))) - \frac{e^{\frac{-1}{x^2}}}{x^{3n+3}} x^3((\sin(\frac{1}{x})(p_1' + \frac{p_2}{x^2}) + \cos(\frac{1}{x})(p_2' - \frac{p_1}{x^2}))=$
$\frac{e^{\frac{-1}{x^2}}}{x^{3n+3}} \cdot ((2p_1 - 3nx^2 p_1) \sin(\frac{1}{x}) + (2p_2 - 3nx^2 p_2) \cos(\frac{1}{x}))) - \frac{e^{\frac{-1}{x^2}}}{x^{3n+3}}(\sin(\frac{1}{x})(p_1' x^3 + p_2 x) + \cos(\frac{1}{x})(p_2' x^3 - p_1 x))=$
Dann gibt es Polynome $q_1, q_2, r_1, r_2, t_1, t_2$ mit :
$= \frac{e^{\frac{-1}{x^2}}}{x^{3n+3}} \cdot (q_1 \sin(\frac{1}{x}) + q_2 \cos(\frac{1}{x})) - \frac{e^{\frac{-1}{x^2}}}{x^{3n+3}}(r_1 \sin(\frac{1}{x}) + r_2 \cos(\frac{1}{x}))=$
$\frac{e^{\frac{-1}{x^2}}}{x^{3n+3}} \cdot (t_1 \sin(\frac{1}{x}) + t_2 \cos(\frac{1}{x}))$

4)
4.1) Für $n = 1$ gilt:

$f^{(n)}(0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)-0}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{\frac{-1}{x^2}} \sin(\frac{1}{x})}{x} = 0$

Begründung:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{\frac{-1}{x^2}}}{x} = 0$

b) $\sin(\frac{1}{x})$ ist beschränkt.

4.2) Für $n > 1$ gilt:

$f^{(n)}(0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{f^{n-1}(x)-0}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{e^{\frac{-1}{x^2}}}{x^{3(n-1)}} \cdot (t_1 \sin(\frac{1}{x}) + t_2 \cos(\frac{1}{x}))}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{\frac{-1}{x^2}}}{x^{3(n-1)+1}} \cdot (t_1 \sin(\frac{1}{x}) + t_2 \cos(\frac{1}{x})) = 0,$

Begründung:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{\frac{-1}{x^2}}}{x^{3(n-1)+1}} = 0$

b) $\lim\limits_{x \to 0}(t_1)$ existiert, also t_1 beschränkt, $\sin(\frac{1}{x})$ ist beschränkt.

also ist das Produkt $t_1 \cdot \sin(\frac{1}{x})$ beschränkt.

$\lim\limits_{x \to 0}(t_2)$ existiert, also t_2 beschränkt, $\cos(\frac{1}{x})$ ist beschränkt.

also ist das Produkt $t_2 \cdot \cos(\frac{1}{x})$ beschränkt.

Damit ist die Summe $(t_1 \sin(\frac{1}{x}) + t_2 \cos(\frac{1}{x}))$ beschränkt.

6.2 Lemma 3

Es gibt eine auf einem echten, offenen Intervall (a, b) beliebig oft differenzierbare Funktion $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ und eine Stelle $x_0 \in (a, b)$, mit :
$f^{(n)}(x_0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und x_0 ist weder streng relatives Extremum noch Wendestelle.

Der Beweis wird mit Hilfe des folgenden Beispiels erbracht:

6.2.1 Beispiel: kein Wendepunkt, kein Extremum

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{x^2}} \cdot \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$

Dann gilt: (Mit Ableitungsrechner https://de.wolframalpha.com/calculators/derivative-calculator)

1)

$f'(x) = \frac{e^{\frac{-1}{x^2}}(2\sin\frac{1}{x} - x\cos\frac{1}{x})}{x^3}$ für $x \neq 0$

$f''(x) = \frac{e^{\frac{-1}{x^2}}((4-7x^2)\sin\frac{1}{x} + 2x(x^2-2)\cos\frac{1}{x})}{x^6}$ für $x \neq 0$

$f'''(x) = \frac{e^{\frac{-1}{x^2}}(2(15x^4-21x^2+4)\sin\frac{1}{x} - x(6x^4-31x^2+12)\cos\frac{1}{x})}{x^9}$ für $x \neq 0$

2)

$f^{(n)}(0) = 0$ wurde oben schon berechnet, siehe: 6.1 auf Seite 17

3)
f” macht an der Stelle x=0 keinen VZW (also ist x=0 keine Wendestelle)
Beweis:
Sei $(0,d)$ ein echtes, offenes Intervall.
Definiere die Folgen $(x_n) = x_1, x_2, \cdots$ und $(z_n) = z_1, z_2, \cdots$ mit:
$x_n := \frac{2}{(4n+1)\pi}$ und $z_n := \frac{2}{(4n+3)\pi}$
Dann gilt:
$x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $z_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$
Da (x_n) Nullfolge gilt für hinreichend kleine x_n dass $x_n < d$. Für hinreichend kleine x_n gilt:
$4 - 7x_n^2$ nahe bei 4 also > 0, $\sin\frac{1}{x_n} = 1$, $\cos\frac{1}{x_n} = 0$, $e^{\frac{-1}{x_n^2}} > 0$, $x_n^6 > 0$. Also gilt:
$f''(x_n) = \frac{e^{\frac{-1}{x_n^2}}((4-7x_n^2)\sin\frac{1}{x_n}+2x_n(x_n^2-2)\cos\frac{1}{x_n})}{x_n^6} > 0.$
Da (z_n) Nullfolge gilt für hinreichend kleine z_n dass $z_n < d$. Für hinreichend kleine z_n gilt:
$4 - 7z_n^2$ nahe bei 4 also > 0, $\sin\frac{1}{z_n} = -1$, $\cos\frac{1}{z_n} = 0$, $e^{\frac{-1}{z_n^2}} > 0$, $z_n^6 > 0$. Also gilt:
$f''(z_n) = \frac{e^{\frac{-1}{z_n^2}}((4-7z_n^2)\sin\frac{1}{z_n}+2z_n(x_n^2-2)\cos\frac{1}{z_n})}{z_n^6} < 0.$
Also liegen in $(0,d)$ f”-Werte größer 0 und kleiner 0.
Also macht f'' an der Stelle $x = 0$ keinen VZW.

4)
f hat an der Stelle x=0 kein strenges Extremum
Beweis:
Sei $(0,d)$ ein echtes, offenes Intervall.
Definiere die Folgen $(x_n) = x_1, x_2, \cdots$ und $(z_n) = z_1, z_2, \cdots$ mit:
$x_n := \frac{2}{(4n+1)\pi}$ und $z_n := \frac{2}{(4n+3)\pi}$
Dann gilt:
$x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $z_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$
und
$f(x_n) = e^{\frac{-1}{x_n^2}} \cdot \sin\frac{1}{x_n} > 0$ für alle $n > 0$ und $f(z_n) = e^{\frac{-1}{z_n^2}} \cdot \sin\frac{1}{z_n} < 0$ für alle $n > 0$ (**)
Da (x_n) Nullfolge existiert ein N mit $x_N < d$. Und wg. (**) folgt $f(x_N) > 0$.
Da (z_n) Nullfolge existiert ein M mit $z_M < d$. Und wg. (**) folgt $f(z_M) < 0$.
Also liegen in $(0,d)$ f-Werte größer 0 und kleiner 0.
Also hat f an der Stelle $x = 0$ kein strenges, relatives Extremum.

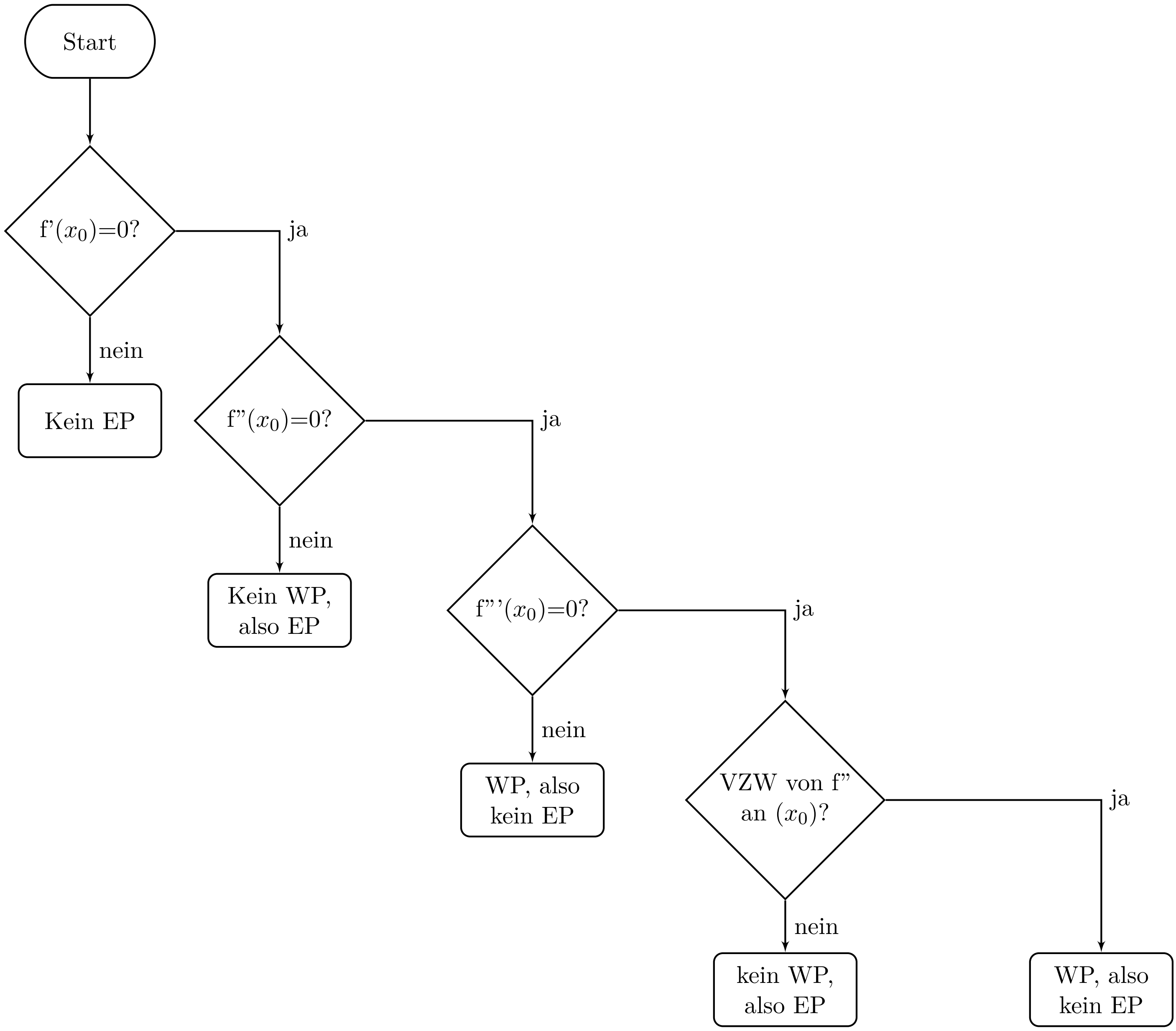
5)
Damit kann man für dieses Beispiel das ”hinreichendes Kriterium unter Verwendung weiterer Ableitungen”(gerade/ungerade Ableitungen) - siehe dazu Wikipedia - nicht mehr benutzen, um entscheiden zu können, ob es sich um einen Wendepunkt oder einem relativen Extremum handelt.

Fazit

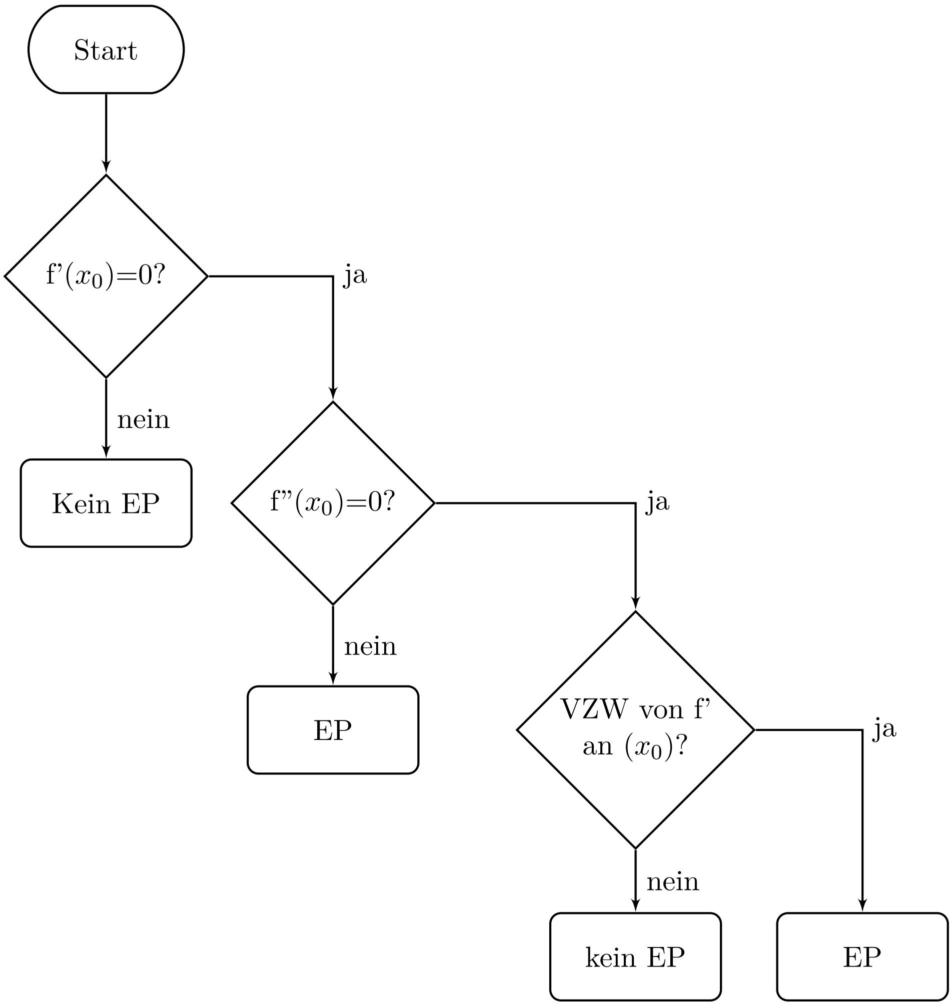
Falls der Lehrplan der Oberstufe keine „pathologischen“ bzw. „exotischen“ Funktionen (also nur „gutartige Schulfunktionen“) zulässt, kann man mit den entsprechenden „Werkzeugen “ dieses Dokuments entscheiden, ob strenge, relative Extrema bzw. Wendepunkte vorliegen.
Zwar kann man mit den hier bereitgestellten Sätzen auch nicht Konstantabschnitte einer Funktion untersuchen, (weil es unendlich viele Stellen mit waagrechter Tangente gibt) doch sind diese Fälle als trivial anzusehen.
In diesem Kontext wären dann „gutartige Schulfunktionen“ diejenigen Funktionen, deren 1. und 2. Ableitungen nur jeweils endlich viele Nullstellen in dem echten, offenen Intervall haben, wo sie untersucht werden.

Mit Hilfe der obigen Sätze kann man Extrempunkte bzw. Wendepunkte mit Hilfe der folgenden Flussdiagramme bestimmen:

Flussdiagramm zur Ermittlung eines Extrempunktes an der Stelle x_0 (mit Hilfe von Wendepunkten) einer "gutartigen Schulfunktion"(wobei hier auch noch die 3. Ableitung existieren muss)



Flussdiagramm zur Ermittlung eines Extrempunktes an der Stelle x_0 (ohne Hilfe von Wendepunkten) einer "gutartigen Schulfunktion"



7 Anmerkungen

Der Satz 1 (Äquivalenzkriterium für ein strenges, relatives Extremum) kann leicht abgeändert werden für nicht notwendig strenge, relative Minima. Der Beweis kann dann mit dem Satz von Darbout geführt werden.

7.1 Satz von Darbout

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf (a, b) und stetig auf $[a, b]$ mit $a < b$
Wenn für ein $c \in \mathbb{R}$ gilt: $f'(a) < c < f'(b)$,
dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit: $f'(\xi) = c$

7.2 Satz 1' (Äquivalenzkriterium für ein relatives Extremum)

Es sei f eine auf einem echten, offenen Intervall (a, b) **differenzierbare** Funktion, die dort **endlich** viele Stellen mit waagrechter Tangente besitzt und $x_T \in (a, b)$.
Dann gelten folgende Behauptungen:

B1)
$T(x_T|f(x_T))$ ist ein **nicht notwendig strenges**, aber relatives Minimum in (a, b) $\iff$
f' macht an x_T einen VZW von - nach + und $f'(x_T) = 0$

B2) B3) analog zu Satz 1 oben

Beweis. zu B1)
"$\Longleftarrow$"
Bekannt aus der Analysis

"$\Longrightarrow$"
1)
zeige: $T(x_T|f(x_T))$ ist ein strenges, relatives Minimum in (a, b)
Man betrachte alle Abstände zwischen allen benachbarten (der insgesamt n) kritischen Stellen (d.h. Nullstellen der Ableitung) und zusätzlich noch den Abstand der ersten kritischen Stelle zum Intervallende a und der letzten kritischen Stelle zum Intervallende b.
Sei d das Minimum aller dieser Abstände. Setze $\delta := \frac{d}{2}$
Sei $T(x_T|f(x_T))$ ein relatives, nicht notwendig strenges Minimum in (a, b).
Dann ist T eine kritische Stelle und deswegen $f'(x_T) = 0$
Alle Ableitungswerte im Intervall $I := [x_T - \delta, x_T + \delta]$ (mit Ausnahme des Ableitungswerts an der Stelle x_T) sind nach Konstruktion des Intervalls I ungleich 0.
Würde nämlich in I noch eine weitere x-Stelle $x' \neq x_T$ existieren mit $f(x') = f(x_T)$, dann gäbe es nach dem Satz von Rolle im Intervall $(x', x_T) \subset I$ bzw. im Intervall $(x_T, x') \subset I$ ein ξ mit $f'(\xi) = 0$.
Damit würde in I - zusätzlich zu den n kritischen Punkten in (a,b) - ein weiterer kritischer Punkt existieren.
Damit gäbe es n+1 kritische Punkte in (a,b), im Widerspruch zur Voraussetzung.

2)
Da nach 1) $T(x_T|f(x_T))$ ein strenges, relatives Minimum ist, gilt:
$\frac{f(x_T)-f(x_T-\delta)}{\delta} < 0$ und $\frac{f(x_T+\delta)-f(x_T)}{\delta} > 0$
Nach dem Mittelwertsatz gibt es x-Stellen $\xi_1 \in L := (x_T - \delta, x_T)$ und $\xi_2 \in R := (x_T, x_t + \delta)$ mit:
$f'(\xi_1) = \frac{f(x_T)-f(x_T-\delta)}{\delta}$ und $f'(\xi_2) = \frac{f(x_T+\delta)-f(x_T)}{\delta}$
Also gilt:
$f'(\xi_1) < 0$ und $f'(\xi_2) > 0$

Da nach Konstruktion des Intervalls I alle Ableitungswerte auch in L ungleich 0 sind,
könnte es auch Ableitungswerte > 0 geben.
Sei also $\zeta_1 \in L$ mit $f'(\zeta_1) > 0$, dann gäbe mach dem Satz von Darbout
in $(\xi_1, \zeta_1) \subset L$ bzw. in $(\zeta_1, \xi_1) \subset L$ ein ξ mit $f'(\xi) = 0$.
Damit gäbe es in $L \subset I$ eine weitere kritische Stelle.
Damit würde in I - zusätzlich zu den n kritischen Punkten in (a,b) - ein weiterer kritischer Punkt existieren.
Damit gäbe es n+1 kritische Punkte in (a,b), im Widerspruch zur Voraussetzung.
Damit müssen also alle Ableitungswerte in L kleiner 0 sein.
Analoges gilt, dass im Intervall R alle Ableitungswerte größer 0 sein müssen.
Also muss f' einen VZW von - nach + machen.

□

7.2.1 Korrolar für Extrema

Es sei f eine auf einem echten, offenen Intervall (a, b) **differenzierbare** Funktion, die dort **endlich** viele Stellen mit waagrechter Tangente besitzt.
Dann gilt:
Jedes relative Extrema in (a,b) ist streng.

Beweis.
siehe Beweis in 1) von Satz 1'. □

7.3 The story behind

Die Geschichte hinter diesem Dokument:
In meinem alten Aufschrieb von 1973 habe ich als Schüler notiert:
x_w ist eine Extremstelle genau dann wenn $f'(x_w) = 0$ und VZW an x_w
Diese falsche Behauptung habe ich dann unkritisch übernommen und in meinem Unterricht verwendet, bis mich ein Kollege 2017 darauf aufmerksam gemacht hat. Dadurch wurde ich gezwungen, über folgende Fragen nachzudenken:
a) Warum wurde dieser Fehler nicht durch ein Gegenbeispiel im Unterricht entdeckt?
b) Wie kann man den „Schaden“ möglichst „billig“ (d.h. mit welchen schwachen Voraussetzungen) reparieren?
Das Ergebnis sind die Lemmata und Sätze in diesem Dokument.