FRAGEN MÜNDLICHE PRÜFUNG

AUFGABE

Bemerkungen:
a) keine Hilfsmittel
b) Bearbeiten Sie die Aufgaben, soweit Sie kommen.

1)
gegeben:
Zwei Punkte A(2 | 4 | 1), B(3 | -1 | 3)

a) Wie heißt die Gleichung der Geraden g = (AB) durch die 2 Punkte A und B ?
b) Ist die Darstellung der Geradengleichung (in Parameterform) eindeutigd.h.
gibt es auch noch eine andere Darstellung (in Parameterform) derselben Gerade?
c) Geben Sie eine Geradengleichung (in Parameterform) einer Geraden h_1 an, die mit g keinen Schnittpunkt besitzt.
d) Geben Sie eine Geradengleichung (in Parameterform) einer Geraden h_2 an, die mit g unendlich viele Schnittpunkt besitzt.
e) Können Sie eine Geradengleichung (in Parameterform) einer Geraden h_3 angeben, die mit g 2 Schnittpunkte besitzt ?

f) Liegt Q(4 | -6 | 5) auf g ?

g) Liegt P(5 | -11 | 3) auf g ?

h) Geben Sie ein Verfahren an, wie man einen Punkt bestimmen kann, der auf g liegt.

i) Geben Sie ein Verfahren an, wie man einen Punkt bestimmen kann, der nicht auf g liegt.

j) Angenommen man würde durch ein EDV-Programm zufällig die Koordinaten eines Punktes im dreidimensionalen Raum bestimmen lassen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit (groß, klein) würde dieser Punkt auf g liegen ?

2) a) Ist das durch die folgenden Punkte gegebene Viereck ein Parallelogramm ?
A(2 | 4 | 1), B(3 | -1 | 3), C(4 | -2 | 3), D(3 | 3 | 1)
b) Ist es ein Rechteck ?

Lösung:

1) a)

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3-2 \\ -1-4 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) Parameterform ist nicht eindeutig.

c) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \\ 4 \end{pmatrix}$

f) Annahme: Q(4 | -6 | 5) $\in$ g
Dann gibt es ein t_p mit:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t_p \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \iff \begin{array}{l} 4 = 2 + t_p \\ -6 = 4 - 5t_p \\ 5 = 1 + 2t_p \end{array} \iff \begin{array}{l} 2 = t_p \\ 2 = t_p \\ 2 = t_p \end{array}$$

Zusatzfrage:
Müssen alle 3 Gleichungen nach t aufgelöst werden, oder reicht nur eine ?

g) Annahme: Q(5 | -11 | 3) $\in$ g
Dann gibt es ein t_p mit:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -11 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t_p \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \iff \begin{array}{l} 5 = 2 + t_p \\ -11 = 4 - 5t_p \\ 3 = 1 + 2t_p \end{array} \iff \begin{array}{l} 3 = t_p \\ 3 = t_p \\ 1 = t_p \end{array}$$

h) Einen Wert für t wählen und in die Parameterform der Geradengleichung einsetzen.

i) Einen Wert für t wählen und in die Parameterform der Geradengleichung einsetzen. Wähle für x_1 und x_2 den berechneten Wert. Wähle für x_3 einen Wert, der nicht dem berechneten entspricht.

j) Die Wahrscheinlichkeit, die Gerade zu "verfehlen" ist sehr groß.

8) a)
A(2 | 4 | 1), B(3 | -1 | 3), C(4 | -2 | 3), D(3 | 3 | 1)
Lösung:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3-2) \\ -1-4 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 4-3 \\ -2-3 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 3-2) \\ 3-4 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 4-3 \\ -2-(-1) \\ 3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es gilt:
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$,
$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$
Damit sind die gegenüberliegenden Seiten gleich lang und parallel.

b)

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1\cdot 1 + (-5)\cdot(-1) + 2\cdot 0 = 6 \neq 0$$

Die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AD}$ stehen nicht senkrecht aufeinander, also ist das Parallelogramm kein Rechteck.

AUFGABE

Bemerkungen:
a) keine Hilfsmittel
b) Bearbeiten Sie die Aufgaben, soweit Sie kommen.

gegeben:

g: $\overset{-->}{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

h: $\overset{-->}{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 14 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

1) In welcher Beziehung stehen die 2 Geraden zueinander (sind sie parallel, nicht parallel)?

2) Wie viele Schnittpunkte haben die Geraden ?

3) Geben Sie die Parameterform einer Geraden s an, die senkrecht zu g steht.

Lösungen:
1)
$$\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{==> } g \parallel h$$

2)
P(1 | -4 | 5) $\in$ g
Gilt: P(1 | -4 | 5) $\in$ h ?
Dann gibt es ein r_P, so dass gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 14 \end{pmatrix} + t_P \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{<==>}$$

$1 = -5 + -4t_P$
$-4 = -1 + 2t_P$
$5 = 14 + 6t_P$
<==>
$t_P = -1{,}5 \wedge t_P = -1{,}5 \wedge t_P = -1{,}5$
also:
P(1 | -4 | 5) $\in$ h
Damit: g = h

3) Geben Sie die Parameterformn einer Geraden an, die senkrecht zu g steht.
$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \quad \text{<==> } -2a + b + 3c = 0 \text{ <==> } b = 2a - 3c$$

wähle a = 1, c = 1:
b = -1
also:
$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

also:

$$s: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Lösung zu 2)

Der Schnittpunkt sei $S(x_{1S} \mid x_{2S} \mid x_{3S})$. Dann gibt es ein r_s und t_s mit:

$$\begin{pmatrix} x_{1S} \\ x_{2S} \\ x_{3S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} + r_s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{1S} \\ x_{2S} \\ x_{3S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 14 \end{pmatrix} + t_s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

also:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} + r_s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 14 \end{pmatrix} + t_s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$1 - 2r_s = -5 - 4t_s$	G1
$-4 + r_s = -1 + 2t_s$	G2
$5 + 3r_s = 14 + 6t_s$	G3
$4t_s - 2r_s = -6$	G4
$2t_s - r_s = -3$	G5
$6t_s - 3r_s = -9$	G6
4 -2 -6	G4 Matrix-
2 -1 -3	G5 schreib-
6 -3 -9	G6 weise
4 -2 -6	G7=G4
0 0 0	G8=G4-2*G5
0 0 0	G9=3*G4-2*G6
1 -0,5 1,5	G10=G7/4

Ergebnis: Die Geraden schneiden sich in unendlich vielen Punkten, d.h:
g = h

AUFGABE

Bemerkungen:
a) keine Hilfsmittel
b) Bearbeiten Sie die Aufgaben, soweit Sie kommen.

gegeben:

g: $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

h: $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

1) Berechnen Sie den Schnittpunkt von g und h.

2) Berechnen Sie den Winkel zwischen diesen Geraden.

3) Berechnen Sie einen Vektor $\overrightarrow{a}$, der senkrecht auf g steht.
Wo liegen diese Vektoren ?

weitere Ersatz-Fragen:

4) Berechnen Sie einen Vektor $\vec{b}$, der senkrecht auf g und h steht.
Wo liegen diese Vektoren ?

5) Berechnen Sie einen Vektor $\vec{c}$, der senkrecht auf g und h steht und die Länge 3 hat.
Wieviele dieser Vektoren gibt es ?

Lösung:
1) Für den Schnittpunkt $S(x_{s1} \mid x_{s2} \mid x_{s3})$ gibt es ein t_s und ein r_s mit:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} + t_s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + r_s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$3 - t_s = 2 + r_s$ (G1)
$-4 + 3t_s = 3 + r_s$ (G2)
$-5 + 4t_s = 7 + 4r_s$ (G3)

(G1) und (G2) jeweils nach r_s aufgelöst und gleichgesetzt ergibt:

$1 - t_s = -7 + 3t_s$
$8 = 4t_s$
$t_s = 2$
also:
$r_s = 1 - t_s = -1$
also:
S(1|2|3)

Frage: Wie kann man Probe machen ?

2) Berechnung des Winkels φ

$$\cos\varphi = \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right|} = \frac{-1\cdot 1 + 3\cdot 1 + 4\cdot 4}{\sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 4^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 4^2}} = \frac{18}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{18}} = \sqrt{\frac{9}{13}} \approx 0{,}9291$$

also: $\varphi \approx 21{,}71°$

3)

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = -a_1 + 3a_2 + 4a_3 = 0$$

wähle z.B:
$a_2 = 1$
$a_3 = 1$
damit:
$a_1 = 3a_2 + 4a_3 = 7$
also:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4)

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = -b_1 + 3b_2 + 4b_3 = 0$$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = b_1 + b_2 + 4b_3 = 0$$

also zusammengefasst:

$-b_1 + 3b_2 + 4b_3 = 0$ (G1)

$b_1 + b_2 + 4b_3 = 0$ (G2)

$4b_2 + 8b_3 = 0$ (G1)+(G2)

$b_2 = -2b_3$

eingesetzt in (G2):

$b_1 - 2b_3 + 4b_3 = 0$

$b_1 = -2b_3$

wähle z.B:

$b_3 = 1$

damit:

$b_1 = -2$, $b_2 = -2$,

also:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

5)

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = -c_1 + 3c_2 + 4c_3 = 0$$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = c_1 + c_2 + 4c_3 = 0$$

also zusammengefasst:

$-c_1 + 3c_2 + 4c_3 = 0$ (G1)
$c_1 + c_2 + 4c_3 = 0$ (G2)

$4c_2 + 8c_3 = 0$ (G1)+(G2)
$c_2 = -2c_3$

eingesetzt in (G2):

$c_1 - 2c_3 + 4c_3 = 0$
$c_1 = -2c_3$

$|\vec{c}| = 3$

$$\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2} = \sqrt{(-2c_3)^2 + (-2c_3)^2 + c_3^2} = \sqrt{9{c_3}^2} = 3\sqrt{{c_3}^2} = 3$$

$3\sqrt{{c_3}^2} = 3 \iff \sqrt{{c_3}^2} = 1$

$c_{3/1} = 1$
$c_{3/2} = -1$

damit:

$c_{1/1} = -2 \cdot 1 = -2$
$c_{1/2} = -2 \cdot -1 = 2$

$c_{2/1} = -2 \cdot 1 = -2$
$c_{2/2} = -2 \cdot -1 = 2$

also:

$$\begin{pmatrix} c_{1/1} \\ c_{2/1} \\ c_{3/1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_{1/2} \\ c_{2/2} \\ c_{3/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

AUFGABE

Bemerkungen:
a) keine Hilfsmittel
b) Bearbeiten Sie die Aufgaben, soweit Sie kommen.

Ein aus dem Kühlschrank genommenes Nahrungsmittel erwärme sich ungefähr nach der Formel: $y(x) = 24 \cdot (1 - 0{,}9 \cdot e^{-0{,}075x})$ Dabei ist y die Temperatur in ° C und x die Zeit in Minuten ab der Entnahme.

1) a) Skizzieren Sie grob (ohne die y-Koordinaten von Punkten zu berechnen) für positive x-Werte den Verlauf des Schaubilds der Funktion
$f_1(x) = e^{-x}$
Bemerkung:
Zeichnen Sie die Schaubilder von a) bis d) in ein und dasselbe Koordinatensystem.

b) Skizzieren Sie grob (ohne die y-Koordinaten von Punkten zu berechnen) für positive x-Werte den Verlauf des Schaubilds der Funktion
$f_2(x) = e^{-0{,}075x}$
Wie verläuft es im Vergleich zum Schaubild von f_1 ?

c) Skizzieren Sie grob (ohne die y-Koordinaten von Punkten zu berechnen) für positive x-Werte den Verlauf des Schaubilds der Funktion
$f_3(x) = 0{,}9 \cdot e^{-0{,}075x}$
Wie verläuft es im Vergleich zum Schaubild von f_2 ?

d) Skizzieren Sie grob (ohne die y-Koordinaten von Punkten zu berechnen) für positive x-Werte den Verlauf des Schaubilds der Funktion
$f_4(x) = 1 - 0{,}9 \cdot e^{-0{,}075x}$
Wie verläuft es im Vergleich zum Schaubild von f_3 ?

e) Skizzieren Sie grob (ohne die y-Koordinaten von Punkten zu berechnen) für positive x-Werte den Verlauf des Schaubilds der Funktion
$y(x) = 24 \cdot (1 - 0{,}9 \cdot e^{-0{,}075x})$
Wie verläuft es im Vergleich zum Schaubild von f_4 ?

2) Welche Temperatur herrscht im Kühlschrank, welches ist die Außentemperatur ?

3) Welche Temperatur hat das Nahrungsmittel nach 10 Minuten ?

4) Vor welcher Zeit wurde das Nahrungsmittel aus dem Kühlschrank genommen, wenn es noch eine Temperatur von 17 ° C besitzt ?

weitere Ersatz-Fragen:

5) Spannungsverlauf beim Aufladen des Kondensators:

$U(t) = U_0 \cdot (1 - e^{-\frac{t}{RC}})$

Lösen Sie die Gleichung nach t auf.

6) Spannungsverlauf beim Entladen des Kondensators:

$U(t) = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$

Lösen Sie die Gleichung nach t auf.

7) Beim radioaktiven Zerfall gilt das Wachstumsgesetz:

$m(t) = m_0 \cdot q^t$ (t in Jahre, m in mg)

Die Halbwertszeit des radioaktiven Kohlenstoffs C-14 beträgt 5730 J.
Wie groß ist dann der Wachstumsfaktor q ?

Lösung

2) 0 min nach der Entnahme hat das Nahrungsmittel die Temperatur des Kühlschranks:

$y(0) = 24 \cdot (1 - 0{,}9 \cdot e^{-0.075 \cdot 0}) = 2{,}4$

Nach unendlich langer Zeit hat das Nahrungsmittel die Außentemperatur T_a angenommen:

$T_A = \lim\limits_{x->00} y(x) = \lim\limits_{x->00} 24 \cdot (1 - 0{,}9 \cdot e^{-0.075 \cdot x}) = 24$

3) Die Temperatur nach 10 min ist:

$y(10) = 24 \cdot (1 - 0{,}9 \cdot e^{-0.075 \cdot 10}) \approx 13{,}8$

4) z min nach der Entnahme hat das Nahrungsmittel noch 17 °C Temperatur:

$y(z) = 24 \cdot (1 - 0{,}9 \cdot e^{-0.075 \cdot z}) = 17$

also:

$17 = 24 \cdot (1 - 0{,}9 \cdot e^{-0.075 \cdot z})$

$\frac{17}{24} = 1 - 0{,}9 \cdot e^{-0.075 \cdot z}$ <==> $1 - \frac{17}{24} = 0{,}9 \cdot e^{-0.075 \cdot z}$ <==> $\frac{7}{24} = 0{,}9 \cdot e^{-0.075 \cdot z}$ <==>

$\frac{7}{24 \cdot 0{,}9} = e^{-0.075 \cdot z}$ <==> $\frac{35}{108} = e^{-0.075 \cdot z}$ <==> $-0{,}075\, z = \ln \frac{35}{108}$ <==>

$$z = \frac{\ln \frac{35}{108}}{-0{,}075} \approx 15{,}02$$

Ergebnis: Ca. 15,02 Minuten nach der Entnahme ist die Temeperatur auf 17°C gesunken.

5) Spannungsverlauf beim Laden des Kondensators:

$U(t) = U_0 \cdot (1 - e^{-\frac{t}{RC}})$ <==> $t = -RC \cdot \ln(1 - \frac{U}{U_0})$

6) Spannungsverlauf beim Entladen des Kondensators:

$U(t) = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$ <=> $t = -RC \cdot \ln \frac{U}{U_0}$

7) Zerfallsgesetz

$m(t) = m_0 \cdot q^t$

$m_0 \cdot q^{5730} = \frac{m_0}{2}$

$q^{5730} = \frac{1}{2}$

$q = \sqrt[5730]{\frac{1}{2}}$

AUFGABE

Bemerkungen:
a) keine Hilfsmittel
b) Bearbeiten Sie die Aufgaben, soweit Sie kommen.

Beim radioaktiven Zerfall gilt das Wachstumsgesetz:
$m(t) = m_0 \cdot q^t$

Zeit:	$t>0$
Masse:	$m(t)$
Anfangsmasse_	$m_0 >0$
Wachstumsfaktor:	$q>0$

1) Kann man eine Obergrenze von q angeben ?

2) Berechnen Sie m(0)

3) q_1 sei der Wachstumsfaktor eines radioaktiven Elements A,
q_2 sei der Wachstumsfaktor eines anderen radioaktiven Elements B.
A zerfällt schneller als B.
In welcher Beziehung stehen q_1 und q_2 zueinander ?

4) Gibt es einen Zeitpunkt, zu dem das ganze radioaktive Material zerfallen ist.

5) Gegeben sei ein radioaktives Material mit dem Wachstumsfaktor q = 0,9.
a) Wie viel Prozent der Anfangsmasse m_0 ist nach 200 Zeiteinheiten noch vorhanden ?
Nach welchem Zeitpunkt besitzt es nur noch die Hälfte seiner Anfangsmasse m_o ?
c) Nach welchem Zeitpunkt besitzt es nur noch ein Viertel seiner Anfangsmasse m_o ?

6) Nach 50 Zeiteinheiten sind noch 1% Masse eines radioaktiven Materials vorhanden.
Wie gross ist der Wachstumsfaktor ?

Lösungen:

1) q < 1

2) $m(0) = m_0 \cdot q^0 = m_0$

3) $q_1 < q_2$

4) nein, da m(t) > 0 für alle $t \in R$

5)
$m(t) = m_0 \cdot q^t$

a) $m(200) = m_0 \cdot (0,9)^{200}$

Es sind noch $0,9^{200} \cdot 100\%$ der Anfangsmase vorhanden.

b) Nach x Tagen sind noch die Hälfte der Ausgangsmenge vorhanden:
Eingesetzt:

$m(x) = m_0 \cdot (0,9)^x$ und

$m(x) = 0,5 \cdot m_0$

und damit:

$0,5 \cdot m_0 = m_0 \cdot (0,9)^x$ <==> $0,5 = (0,9)^x$ <==> $x = \log_{0,9} 0,5$

$= \frac{0,5}{\log_{\sqrt[8,1]{0,5}}}$

c)
$m(2x) = m_0 \cdot (0,9)^{2x} = m_0 \cdot ((0,9)^x)^2 = m_0 \cdot ((0,9)^x)^2 = m_0 \cdot (0,9)^x \cdot (0,9)^x =$

$m_0 \cdot (0,9)^x \cdot (0,9)^x = 0,5 m_0 \cdot (0,9)^x = 0,5 \cdot 0,5 m_0 = 0,25 m_0$

6)
$m(t) = m_0 \cdot q^t$

damit gilt dann:

$m(50) = m_0 \cdot q^{50}$ und

$m(50) = \frac{m_0}{100}$

also:

$m_0 \cdot q^{50} = \frac{m_0}{100}$ <==> $q^{50} = 0,01$ <==> $q = \sqrt[50]{0,01}$

also:

$m(t) = m_0 \cdot (\sqrt[50]{0,01})^t$

AUFGABE

Bemerkungen:
a) keine Hilfsmittel
b) Bearbeiten Sie die Aufgaben, soweit Sie kommen.

1) a) Skizzieren Sie grob den Verlauf des Schaubilds K_f der Funktion
$f(x) = e^x$

b) Skizzieren (die Kurve in das gleiche Schaubild wie bei a) eintragen) Sie grob den Verlauf des Schaubilds K_g der Funktion
$g(x) = e^{2x}$

c) Wie verläuft K_g in Bezug auf K_f ?
Benutzen Sie für die Argumentation den Verlauf von K_f !

2)
Vom Punkt P(1 | 0) wird die Tangente an das Schaubild der Funktion mit der Funktionsgleichung $h(x) = e^{0,5x}$ gelegt.
a) Berechnen Sie den Berührpunkt.
b) Geben Sie die Gleichung der Tangente an.

3) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen:
$a)\ \log_2(x-3) - \log_2(x^2-9) + 2 = 0$
$b)\ 2{,}5 \cdot 2^{4x-4} \cdot 5^{x+2} = 2^{2x+1} \cdot 5^{3x-3}$

4) Vereinfachen Sie:
$$\log_p \sqrt{\frac{4a^3 \cdot \sqrt{p}}{b^5 \cdot q^7}}$$

Lösungen:
2) Der gesuchte Berührpunkt sei B(x_B, y_B).
Die ZPF der Geradengleichung ergibt die sogenannte Tangentenbedingung:

$$\frac{h(x_B)-0}{x_B-1} = h'(x_B) \quad \text{(TB)}$$

Es gilt aber:

$$h(x_B) = x_B \text{ und } h'(x_B) = \frac{1}{2}e^{0,5x_B}$$

Setze dies in (TB) ein. Das ergibt dann:

$$\frac{e^{0,5x_B}-0}{x_B-1} = \frac{1}{2}e^{0,5x_B}$$

$$\frac{2e^{0,5x_B}}{x_B-1} = e^{0,5x_B}$$

$$2e^{0,5x_B} = x_B e^{0,5x_B} - e^{0,5x_B}$$

$$2e^{0,5x_B} = e^{0,5x_B}(x_B-1) \quad | : \quad e^{0,5x_B}$$

$$2 = x_B - 1$$

$x_B = 3$
$y_B = h(3) = e^{1,5}$, also B(3 | $e^{1,5}$)

PSF:

$$\frac{y-0}{x-1} = \frac{1}{2}e^{0,5\cdot 3} \Longleftrightarrow y = \frac{1}{2}e^{1,5}x - \frac{1}{2}e^{1,5}$$

3)

$$a) \quad \log_2(x-3) - \log_2(x^2-9) + 2 = 0 \qquad D = \{x \in R \mid x > 3\} \quad \Leftrightarrow$$

$$\log_2\frac{x-3}{x^2-9} + 2 = 0 \Leftrightarrow \log_2\frac{1}{x+3} + 2 = 0 \Leftrightarrow \log_2(x+3)^{-1} + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$-\log_2(x+3) + 2 = 0 \Leftrightarrow \log_2(x+3) = 2 \Leftrightarrow \log_2(x+3) = 2 \Leftrightarrow$$

$$x+3 = 2^2 \Leftrightarrow x = 1 \ (\textit{keine Lösung})$$

$$b) \quad 2,5\cdot 2^{4x-4}\cdot 5^{x+2} = 2^{2x+1}\cdot 5^{3x-3} \qquad D = R \Leftrightarrow$$

$$2,5\cdot\frac{2^{4x}}{16}\cdot 5^x\cdot 5^2 = 2^{2x}\cdot 2\cdot\frac{5^{3x}}{5^3} \Leftrightarrow$$

$$\frac{2,5\cdot 5^2}{16}\cdot 2^{4x}\cdot 5^x = 2^{2x}\cdot 5^{3x}\cdot\frac{2}{5^3} \Leftrightarrow$$

$$\frac{5\cdot 5^2\cdot 5^3}{16\cdot 4} = \frac{2^{2x}\cdot 5^{3x}}{2^{4x}\cdot 5^x} \Leftrightarrow \frac{5^6}{2^6} = 2^{2x-4x}\cdot 5^{3x-x} \Leftrightarrow$$

$$\frac{5^6}{2^6} = 2^{-2x}\cdot 5^{2x} \Leftrightarrow \frac{5^6}{2^6} = \frac{5^{2x}}{2^{2x}} \Leftrightarrow (\frac{5}{2})^6 = (\frac{5}{2})^{2x} \Leftrightarrow$$

$$(\frac{5}{2})^6 = (\frac{5}{2})^{2x} \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = 3$$

$$4)\quad \log_p \sqrt{\frac{4a^3\cdot\sqrt{p}}{b^5\cdot q^7}} = \log_p\left(\frac{4a^3\cdot\sqrt{p}}{b^5\cdot q^7}\right)^{\frac{1}{2}} = \log_p \frac{(4a^3\cdot\sqrt{p})^{\frac{1}{2}}}{(b^5\cdot q^7)^{\frac{1}{2}}} = \log_p \frac{(4a^3)^{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{p}^{\frac{1}{2}}}{(b^5)^{\frac{1}{2}}\cdot(q^7)^{\frac{1}{2}}} =$$

$$\log_p \frac{4^{\frac{1}{2}}\cdot a^{3\cdot\frac{1}{2}}\cdot(p^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}}{b^{5\cdot\frac{1}{2}}\cdot q^{7\cdot\frac{1}{2}}} = \log_p \frac{\sqrt{4}\cdot a^{\frac{3}{2}}\cdot p^{\frac{1}{4}}}{b^{\frac{5}{2}}\cdot q^{\frac{7}{2}}} = \log_p \frac{2\cdot a^{\frac{3}{2}}\cdot p^{\frac{1}{4}}}{b^{\frac{5}{2}}\cdot q^{\frac{7}{2}}} =$$

$$\log_p(2\cdot a^{\frac{3}{2}}\cdot p^{\frac{1}{4}}) - \log_p(b^{\frac{5}{2}}\cdot q^{\frac{7}{2}}) = \log_p 2 + \log_p a^{\frac{3}{2}} + \log_p p^{\frac{1}{4}} - \log_p b^{\frac{5}{2}} - \log_p q^{\frac{7}{2}} =$$

$$\log_p 2 + \frac{3}{2}\log_p a + \frac{1}{4} - \frac{5}{2}\log_p b - \frac{7}{2}\log_p q$$

2. Lösung:

$$B6)\quad \log_p \sqrt{\frac{4a^3\cdot\sqrt{p}}{b^5\cdot q^7}} = \log_p\left(\frac{4a^3\cdot\sqrt{p}}{b^5\cdot q^7}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log_p \frac{4a^3\cdot\sqrt{p}}{b^5\cdot q^7} =$$

$$\frac{1}{2}\left(\log_p(4a^3\cdot\sqrt{p}) - \log_p(b^5\cdot q^7)\right) = \frac{1}{2}\left(\log_p(4a^3) + \log_p\sqrt{p} - \log_p b^5 - \log_p q^7\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(\log_p 4 + \log_p a^3 + \log_p p^{\frac{1}{2}} - 5\log_p b - 7\log_p q\right) =$$

$$\frac{1}{2}\log_p 4 + \frac{1}{2}\log_p a^3 + \frac{1}{2}\log_p p^{\frac{1}{2}} - \frac{5}{2}\log_p b - \frac{7}{2}\log_p q =$$

$$\frac{1}{2}\log_p 2^2 + \frac{3}{2}\log_p a + \frac{1}{2}\log_p p^{\frac{1}{2}} - \frac{5}{2}\log_p b - \frac{7}{2}\log_p q$$

$$\log_p 2 + \frac{3}{2}\log_p a + \frac{1}{4} - \frac{5}{2}\log_p b - \frac{7}{2}\log_p q$$

AUFGABE

Bemerkungen:
a) keine Hilfsmittel
b) Bearbeiten Sie die Aufgaben, soweit Sie kommen.

1)
$f(x) = e^{-x}$

a) Berechnen Sie die Fläche zwischen der Kurve K_f , der x-Achse, der y-Achse und der Geraden
$x = a$, wobei $a > 0$ ist.

b) Wie groß wird die Fläche, wenn a gegen unendlich strebt.

2)
$h(x) = e^x - 1$
a) Ist K_h punktsymmetrisch bzgl. dem Ursprung ?
Mathematische Begründung!

3)
Vereinfachen Sie

$$\log_p \sqrt{\frac{4a^3 \cdot \sqrt{p}}{b^5 \cdot q^7}}$$

4)
Von einer radioaktiven Substanz sind nach einer Stunde noch 400 mg, nach 2 Stunden noch 300 mg vorhanden. Wie lautet das Zerfallgesetz ?

Lösungen:
1)

a) $A = \int_0^a e^{-x} dx = \left[-e^{-x}\right]_0^a$ = -e^{-a} - (-e^{-0}) = -e^{-a} + 1 = $1 - \frac{1}{e^a}$

b) $\lim\limits_{a->00} (1 - \frac{1}{e^a}) = 1$

2) Gilt h(x) = -h(-x)
Wähle x = 1
h(1) = e^1 -1 = e - 1
-h(-1) = -(e^{-1} -1) = 1 - e^{-1} = 1 - 1/e

Bemerkung:
Setze x = ln 3
h(ln 3) = $e^{\ln 3}$ -1 = 3 - 1 = 2
-h(-ln 3) = -($e^{-\ln 3}$ -1) = 1 - e^{-} ln 3 = 1 - 1/3 = 2/3

3)

$$\log_p \sqrt{\frac{4a^3 \cdot \sqrt{p}}{b^5 \cdot q^7}} = \log_p \left(\frac{4a^3 \cdot \sqrt{p}}{b^5 \cdot q^7}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_p \frac{4a^3 \cdot \sqrt{p}}{b^5 \cdot q^7} =$$

$$\frac{1}{2}\left(\log_p (4a^3 \cdot \sqrt{p}) - \log_p (b^5 \cdot q^7)\right) = \frac{1}{2}\left(\log_p (4a^3) + \log_p \sqrt{p} - \log_p b^5 - \log_p q^7\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(\log_p 4 + \log_p a^3 + \log_p p^{\frac{1}{2}} - 5\log_p b - 7\log_p q\right) =$$

$$\frac{1}{2}\log_p 4 + \frac{1}{2}\log_p a^3 + \frac{1}{2}\log_p p^{\frac{1}{2}} - \frac{5}{2}\log_p b - \frac{7}{2}\log_p q =$$

$$\frac{1}{2}\log_p 2^2 + \frac{3}{2}\log_p a + \frac{1}{2}\log_p p^{\frac{1}{2}} - \frac{5}{2}\log_p b - \frac{7}{2}\log_p q$$

$$\log_p 2 + \frac{3}{2}\log_p a + \frac{1}{4} - \frac{5}{2}\log_p b - \frac{7}{2}\log_p q$$

4)
3)
1. Lösung
Für das Wachstumsgesetz gilt:
gegeben:
$m(t) = m_0 \cdot q^t$ (t in Stunden, m in mg)
gesucht:
q und m_0

Nach 1 h sind noch 400 mg vorhanden, also:
$m(1) = 400$ und
$m(1) = m_0 \cdot q^1$
damit:
400 = m_0 • q^1 bzw. vereinfacht:

(G1) $400 = m_0 \cdot q$

Nach 2 h sind noch 300 mg vorhanden, also:
$m(2) = 300$ und
$m(2) = m_0 \cdot q^2$
damit:
(G2) $300 = m_0 \cdot q^2$

Man hat also 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten. Jeweils auflösen nach m_0 :
$$m_0 = \frac{400}{q}$$
$$m_0 = \frac{300}{q^2}$$
gleichsetzen ergibt:
$$\frac{400}{q} = \frac{300}{q^2} \quad | \cdot q^2$$
$400\,q = 300$
ergibt:
$q = 3/4$ und
$$m_0 = \frac{400}{q} = \frac{400}{0{,}75} = \frac{1600}{3}$$
Damit:
$$m(t) = \frac{1600}{3} \cdot (\frac{3}{4})^t$$
Probe machen !!

2. Lösung
Nach 1 h sind noch 400 mg vorhanden, nach 2 h sind noch 300 mg vorhanden.
Wenn man nach einer Stunde (bei 400 mg Material) eine Stoppuhr laufen lässt, weiß man, dass nach einer Stunde auf der Stoppuhr von den 400 mg Material noch 300 mg Material vorhanden sind. Es sind also noch 300 mmg / 400 mg = 3/4 des Ausgangmaterials vorhanden.
Nach jeder Stunde sind also noch 3/4 der jeweiligen Ausgangsmasse (d.h. Masse vor einer Stunde) vorhanden. Man könnte also hier - ähnlich wie bei der Halbwertszeit - von einer **Dreiviertelswertzeit** reden.
Es gilt also:
$$m(t) = m_0 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^t \qquad \text{(t in Stunden, m in mg)}$$

Nach 1 h sind noch 400 mg vorhanden, also:
$m(1) = 400$ und
$$m(1) = m_0 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^1$$
damit:
$$400 = m_0 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^1 \implies 400 = m_0 \cdot \left(\frac{3}{4}\right) \implies m_0 = \frac{400}{\frac{3}{4}} = \frac{1600}{3}$$

Damit:

$$m(t) = \frac{1600}{3} \cdot (\frac{3}{4})^t$$

AUFGABE

Bemerkungen:
a) keine Hilfsmittel
b) Bearbeiten Sie die Aufgaben, soweit Sie kommen.

1) Eine Parabel 4. Ordnung hat in O(0 | 0) eine waagrechte Tangente und in P(-2 | 2) einen Wendepunkt mit waagrechter Tangente. Wie heisst die Funktionsgleichung dieser Parabel ?

2) Legen Sie von O(0|0) aus die Tangenten an die Parabel mit der Funktionsgleichung
$f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 1$

3) Geben Sie die Funktionsgleichung eines Schaubilds K_f und einen Punkt $P(x_W \mid y_W) \in K_f$ an, bei dem gilt
a) $f''(x_W) = 0$ und $f'''(x_W) = 0$ und P ist Wendepunkt
b) $f''(x_W) = 0$ und $f'''(x_W) \neq 0$ und P ist kein Wendepunkt

Lösungen:
1)
$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$
$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$
$f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$

a) $O(0 \mid 0) \in K_f$
$0 = a \cdot 0^4 + b \cdot 0^3 + c \cdot 0^2 + d \cdot 0 + e$
$e = 0$

b) e = 0 eingesetzt in $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ ergibt:
$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx$

c) O(0 | 0) hat eine waagrechte Tangente
f '(0) = 0
$4a \cdot 0^3 + 3b \cdot 0^2 + 2c \cdot 0 + d = 0$
$d = 0$

d) d = 0 eingesetzt in $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx$ ergibt:
$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2$

e) $P(-2 \mid 2) \in K_f$
$2 = a \cdot (-2)^4 + b \cdot (-2)^3 + c \cdot (-2)^2$
$2 = 16a - 8b + 4c$
$1 = 8a - 4b + 2c \quad (G1)$

f) P(-2 | 2) ist Wendepunkt, also f ''(-2) = 0
$12a \cdot (-2)^2 + 6b \cdot (-2) + 2c = 0$
$48a - 12b + 2c = 0$
$24a - 6b + c = 0 \quad (G2)$

g) P(-2 | 2) hat eine waagrechte Tangente
f '(-2) = 0
$4a \cdot (-2)^3 + 3b \cdot (-2)^2 + 2c \cdot (-2) = 0$
$-32a + 12b - 4c = 0$
$-8a + 3b - c = 0 \quad (G3)$

h) Mit TR (Taschenrechner), Additionsverfahren oder Gausscher Algorithmus folgt aus (G1), (G2) und (G3):
$a = \frac{3}{8},\ b = 2,\ c = 3$
i) Ergebnis:
$f(x) = \frac{3}{8}x^4 + 2x^3 + 3x^2$

2) Legen Sie von O(0|0) aus die Tangenten an die Parabel mit der Funktionsgleichung

$f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 1$

$f'(x) = \frac{1}{2}x$

Tangentenbedingung:

$\frac{f(x_B)}{x} = f'(x_B)$

$\frac{\frac{1}{4}x_B^2 + 1}{x} = \frac{1}{2}x_B$ <==> $\frac{1}{4}x_B^2 + 1 = \frac{1}{2}x_B^2$ <==> $x_B^2 + 4 = 2x_B^2$ <==> $x_B^2 = 4$

<==> $x_{B1} = 2$, $x_{B1} = -2$

3)

a) $f(x) = x^5$; P(0|0)

b) $h(x) = x^4$; P(0|0)

AUFGABE

Bemerkungen:
a) keine Hilfsmittel
b) Bearbeiten Sie die Aufgaben, soweit Sie kommen.

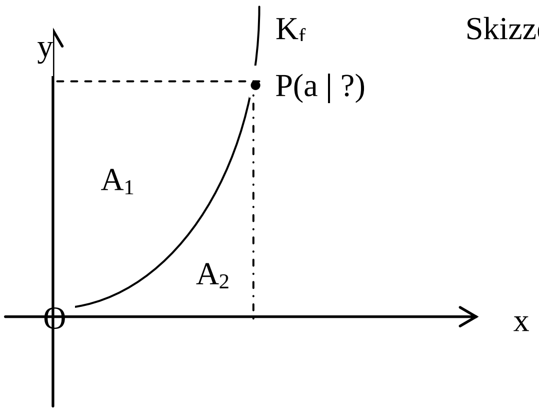
1) Legen Sie von $P(-1 \mid -5)$ aus die Tangenten an die Parabel mit der Funktionsgleichung
$f(x) = 3x^2 + 6x + 1$
Bestimmen Sie die Berührpunkte.
Rechnen Sie die Aufgabe nur so weit durch, bis Sie eine Gleichung mit einer Unbekannten haben

2) Wann ist einer Kurve rechtsgekrümmt, wann linksgekrümmt?
a) Geben Sie jeweils ein Beispiel dafür an (mit Funktionsgleichung)
b) Geben Sie die mathematischen Kriterien dafür an.

3) Geben Sie die Funktionsgleichung eines Schaubilds K_f und einen Punkt $P(x_W \mid y_W) \in K_f$ an, bei dem gilt
a) $f''(x_W) = 0$ und $f'''(x_W) = 0$ und P ist Wendepunkt
b) $f''(x_W) = 0$ und $f'''(x_W) \neq 0$ und P ist kein Wendepunkt
c) Geben Sie ein Kriterium an, bei sich entscheiden läßt wann ein Wendepunkt vorliegt bzw. wann kein Wendepunkt vorliegt.
Begründen Sie!

4) Die Kurven K_f und K_h berühren sich im Punkt $B(x_B \mid y_B)$.
a) Geben Sie ein Beispiel dafür an.
b) Geben Sie die mathematischen Kriterien dafür an.

5)



Skizze

K_f ist das Schaubild der Funktion mit der Funktionsgleichung $f(x) = x^2$
Die Fläche A_1 wird durch K_f ,die y-Achse und die waagrechte Gerade, die durch P geht, begrenzt. Die Fläche A_2 wird durch K_f ,die x-Achse und die senkrechte Gerade, die durch P geht, begrenzt.
a) Um das wie vielfache ist A_1 größer als A_2 , wenn $P(a \mid ?) \in K_f$ ein beliebiger Punkt ist $(a>0)$?

Lösung:
$f(x) = 3x^2 + 6x + 1$
$f'(x) = 6x + 6$

$$\frac{y_B - (-5)}{x_B - (-1)} = f'(x_B) \iff \frac{y_B - (-5)}{x_B - (-1)} = 6x_B + 6 \iff \frac{3x_B^2 + 6x_B + 1 - (-5)}{x_B - (-1)} = 6x_B + 6$$

2)
Zusammenfassend gilt:
$f''(x) > 0$ ==> Linkskurve
$f''(x) < 0$ ==> Rechtskurve

3)
a) $f(x) = x^5$; P(0|0)
b) $h(x) = x^4$; P(0|0)
c) $W(x_W, y_W)$ ist Wendepunkt <==> f '' macht an x_W einen VZW

4)
a) $f(x) = x^2$ und $h(x) = -x^2$
b) $f'(x_B) = h'(x_B)$ und $f(x_B) = h(x_B)$

5)
$$A_2 = \int_0^a x^2 dx = [\frac{x^3}{3}]_0^a = \frac{a^3}{3}$$

$$A_1 = a \cdot f(a) - A_2 = a \cdot a^2 - \frac{a^3}{3} = a^3 - \frac{a^3}{3} = \frac{2}{3}a^3$$

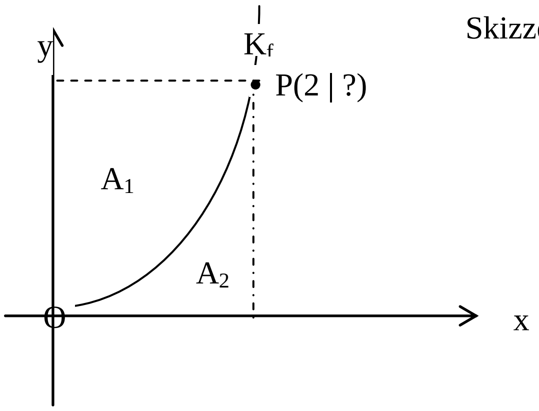
$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\frac{2}{3}a^3}{\frac{1}{3}a^3} = 2$$

AUFGABE

Bemerkungen:
a) keine Hilfsmittel
b) Bearbeiten Sie die Aufgaben, soweit Sie kommen.

1) Eine Parabel 3. Ordnung hat in P(1 | 4) eine waagrechte Tangente und in Q(0 | 2) einen Wendepunkt. Wie heißt die Funktionsgleichung der Parabel ?

2)



Skizze

K_f ist das Schaubild der Funktion mit der Funktionsgleichung $f(x) = x^2$
Die Fläche A_1 wird durch K_f ,die y-Achse und die waagrechte Gerade, die durch P geht, begrenzt. Die Fläche A_2 wird durch K_f ,die x-Achse und die senkrechte Gerade, die durch P geht, begrenzt.
a) Begründen Sie anschaulich, warum $A_1 > A_2$ ist.
b) Um das wie vielfache ist A_1 größer als A_2 ?
c) Um das wie vielfache ist A_1 größer als A_2 , wenn $P(a \mid ?) \in K_f$ ein beliebiger Punkt ist ($a>0$) ?

Lösungen:
1)
$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
$f''(x) = 6ax + 2b$

a) P(1 | 4) $\in K_f$
$4 = a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d$
$4 = a + b + c + d \quad (G1)$

b) P(1 | 4) hat eine waagrechte Tangente
f '(1) = 0
$3a \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 + c = 0$
$3a + 2b + c = 0 \quad (G2)$

c) Q(0 | 2) $\in K_f$
$2 = a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d$
$d = 2$

d) Q(0 | 2) ist Wendepunkt
f ''(0) = 0
$6a \cdot 0 + 2b = 0$
$b = 0$

e) d = 2 und b = 0 eingesetzt in (G1) und (G2) ergibt:
$4 = a + c + 2$
$2 = a + c \qquad (G3)$

$3a + c = 0 \qquad (G4)$

f) Mit TR (Taschenrechner), Additionsverfahren oder Gausscher Algorithmus folgt aus (G3) und (G4):
a = -1, c = 3

g) Ergebnis:
$f(x) = -x^3 + 3x + 2$

2)
a) Sei A_R die Fläche des Rechtecks, dessen Diagonale durch O und P geht und dadurch in 2 Dreiecke geteilt wird. Da K_f unterhalb der Gerade (OP) liegt, gilt: $A_1 > A_R/2 > A_2$
Damit gilt dann:
$A_1 > A_2$

b)

$$A_2 = \int_0^2 x^2 dx = [\frac{x^3}{3}]_0^2 = \frac{8}{3}$$

$$A_1 = 2 \cdot f(2) - A_2 = 2 \cdot 2^2 - \frac{8}{3} = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{16/3}{8/3} = 2$$

andere Möglichkeit (Berechnung A_1):

$$A_1 = \int_0^2 (Oberkurve - Unterkurve) dx =$$

$$\int_0^2 (f(2) - x^2) dx = \int_0^2 (4 - x^2) dx =$$

$$= [4x - \frac{x^3}{3}]_0^2 = 8 - \frac{2^3}{3} = \frac{16}{3}$$

c)

$$A_2 = \int_0^a x^2 dx = [\frac{x^3}{3}]_0^a = \frac{a^3}{3}$$

$$A_1 = a \cdot f(a) - A_2 = a \cdot a^2 - \frac{a^3}{3} = a^3 - \frac{a^3}{3} = \frac{2}{3} a^3$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\frac{2}{3} a^3}{\frac{1}{3} a^3} = 2$$

andere Möglichkeit (Berechnung A_1):

$$A_1 = \int_0^a (Oberkurve - Unterkurve) dx =$$

$$\int_0^a (f(a) - x^2) dx = \int_0^a (a^2 - x^2) dx =$$

$$= [a^2 x - \frac{x^3}{3}]_0^a = a^3 - \frac{a^3}{3} = \frac{2}{3} a^3$$

AUFGABE

Bemerkungen:
a) keine Hilfsmittel
b) Bearbeiten Sie die Aufgaben, soweit Sie kommen.

1) Welche Symmetrieeigenschaft hat die Sinuskurve, welche die Kosinuskurve ?

2) Skizzieren Sie die Kosinuskurve (Definitionsbereich D = [-360° ; 360°])
Es gilt:
cos 60° = 0,5
Für welche Winkel x zwischen -360° und 360° gilt:
cos x = 0,5

3)
Berechnen Sie mathematisch:

$$\int_0^{2\pi} \cos(x)dx$$

Können Sie den errechneten Wert auch anschaulich begründen ?

4) Berechnen Sie die Fläche zwischen der x-Achse, dem Schaubild der Kosinusfunktion und den Geraden mit den Gleichungen x=0 und x=2π

5) Wo hat die Sinuskurve die größte Steigung, wo die kleinste Steigung ?

6) Ermitteln Sie die Schnittpunkte der folgenden Funktion mit der x-Achse im Intervall [0 ; 2π]:
f(x) = 3 sin (2x) - 4

7)
Das Schaubild einer Funktion
h(x) = a·x + b·cos(x)
hat im Punkt P($\frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{4}$) die Steigung -1
Bestimmen Sie a und b.

Lösungen:
1) a) Sinuskurve punktsymmetrisch bzgl. allen Wendepunkten, achsensymmetrisch bzgl. allen zur y-Achse parallelen Geraden durch die Extrempunkte
b) Kosinuskurve punktsymmetrisch bzgl. allen Wendepunkten, achsensymmetrisch bzgl. allen zur y-Achse parallelen Geraden durch die Extrempunkte

2) $x_1 = 60°$, $x_2 = -360° + 60° = -300°$, $x_3 = -60°$, $x_4 = 360° - 60° = 300°$,

3)
$$\int_0^{2\pi} \cos(x)dx = [\sin(x)]_0^{2\pi} = \sin(2\pi) = -\sin(0) = 0$$

4)
$$A = 4\int_0^{\pi/2} \cos(x)dx = 4 \cdot [\sin(x)]_0^{\pi/2} = 4 \cdot \left(\sin(\frac{\pi}{2}) - \sin(0)\right) = 4$$
5)
f(x) = sin(x)
f '(x) = cos(x)
Die grösste/kleinste Steigung ist dort, wo die Kosinusfunkton den Wert 1 bzw. -1 hat.

6)
a) Schnittpunkte mit der x-Achse
Schnittpunkte $S_x(x_s \mid 0)$ mit der x-Achse: $S_x(x_s \mid 0) \in K_f$
$3\sin(2x_S) - 4 = 0$ <==> $3\sin(2x_S) = 4$ <==> $\sin(2x_S) = 4/3$
L ={}

b) alternative Aufgabe
Schnittpunkte mit der x-Achse
Schnittpunkte $S_x(x_s \mid 0)$ mit der x-Achse: $S_x(x_s \mid 0) \in K_f$
$0 = 10\sin(3x_S) - 5$ <==> $5 = 10\sin(3x_S)$ <==> $\sin(3x_S) = 0,5$
$3x_{S1} = 30°$ ==> $x_{S1} = 10°$
$3x_{S1} = 150°$ ==> $x_{S1} = 50°$

7)
Ableitungen
f(x) = ax + b cos(x)
f '(x) = a - b sin(x)

a) $P(\pi/2 \mid \pi/4) \in K_f$:
$\pi/4 = a\cdot\pi/2 + b\cdot\cos(\pi/2)$
$\pi/4 = a\cdot\pi/2$
a = 0,5

b) $f'(\pi/2) = -0,5$:
$-0,5 = a - b\sin(\pi/2)$
a = 0,5 eingesetzt:
$-0,5 = 0,5 - b\sin(\pi/2)$
b = 1
also: f(x) = 0,5x + cos(x)

AUFGABE

1) Welche Symmetrieeigenschaft hat die Sinuskurve, welche die Kosinuskurve ?

2) Skizzieren Sie die Sinuskurve (Definitionsbereich D = [-360° ; 360°])
Es gilt:

$$\sin 15° = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

Für welche Winkel x zwischen -360° und 360° gilt:

$$\sin x = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

3) Skizzieren Sie die Kosinuskurve (Definitionsbereich D = [-360° ; 360°])
Es gilt:
cos 60° = 0,5
Für welche Winkel x zwischen -360° und 360° gilt:
cos x = 0,5

4) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Tangenten des "ersten" Schnittpunkts der Kosinuskurve mit der positiven x-Achse.

5) Für welches a $\in$ R ist die Fläche zwischen der Sinuskurve, der x-Achse und den Geraden mit den Gleichungen x = 0 und x = a gleich der Fläche zwischen der Sinuskurve, der x-Achse und den Geraden mit den Gleichungen x = a und x $\frac{\pi}{2}$

Lösungen:
1) a) Sinuskurve punktsymmetrisch bzgl. allen Wendepunkten, achsensymmetrisch bzgl. allen zur y-Achse parallelen Geraden durch die Extrempunkte
b) Kosinuskurve punktsymmetrisch bzgl. allen Wendepunkten, achsensymmetrisch bzgl. allen zur y-Achse parallelen Geraden durch die Extrempunkte

2) x_1 = 15°, x_2 = 180°-15° =165°, x_3 = -180-15° = -195°, x_4 = -360° + 15° = -345°,

3) x_1 = 60°, x_2 = -360° + 60° = -300°, x_3 = -60°, x_4 = 360° - 60° = 300°,

4) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Tangenten des "ersten" Schnittpunkts der Kosinuskurve mit der positiven x-Achse.
f(x) = cos(x)
f '(x) = -sin(x)
$N_1(\frac{\pi}{2} | 0)$
$f'(\frac{\pi}{2}) = -\sin(\frac{\pi}{2}) = -1$
PSF der Geradengleichung:
$\frac{y-0}{x-\frac{\pi}{2}} = -1$ <==> $y = -x + \frac{\pi}{2}$

5)
$$\int_0^a \cos(x)dx = \int_a^{\pi/2} \cos(x)dx$$
$$[-\cos(x)]_0^a = [-\cos(x)]_a^{\pi/2}$$
$$-\cos(a) - (-\cos(0)) = -\cos(\pi/2) - (-\cos(a))$$
$$-\cos(a) + 1 = +\cos(a)$$
$$1 = 2 \cdot \cos(a)$$
cos a = 0,5
a = 60°

AUFGABE

Bemerkungen:
a) keine Hilfsmittel
b) Bearbeiten Sie die Aufgaben, soweit Sie kommen.

1) Ermitteln Sie die Lösungsmenge der folgenden Gleichung:
5 + 2 sin(4x+5) = 11

2)
f(x)= sin(x)
h(x) = -sin(x)
Stehen die Tangenten der Kurven K_f und K_h im Ursprung senkrecht aufeinander?
Mathematische Begründung

3)
f(x) = $-4 \cdot \sin(\frac{2}{3}x - \frac{20}{3}\pi)$

a) Wie groß ist die Amplitude und die Periode der Kurve K_f ?

b) Um welchen Wert y_0 muss die Sinuskurve der Form y = a sin (kx) (mit a>0 und k>0) jeweils in y-Richtung und **minimal** um $x_{minR} \geq 0$ nach **rechts** und $x_{minL} \geq 0$ nach **links** in x-Richtung verschoben werden, so dass die verschobene Kurve jeweils die obige Funktionsgleichung besitzt ?

4) Welche der folgenden Aussagen gelten (Begründen Sie)?

a) $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$

b) $\sin x = \cos(x - \frac{\pi}{2})$

c) $\cos x = -\sin(x - \frac{\pi}{2})$

d) $\sin x = -\cos(x + \frac{\pi}{2})$

e $\sin(x - \pi) = -\sin(x)$

f) $\cos(x - \pi) = -\cos(x)$

5) Welche Symmetrieeigenschaft hat die Sinuskurve bzw. Kosinuskurve? (mathematische Formulierung).
Zeigen Sie damit, dass folgendes gilt:

$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x - \frac{\pi}{2})$

$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = -\sin(x - \frac{\pi}{2})$

Lösung:
1) Ermitteln Sie die Lösungsmenge der folgenden Gleichung:
5 + 2 sin(4x+5) = 11
2 sin(4x+5) = 6
sin(4x+5) = 3
L = {}

2)
f(x)= sin(x)
f ’(x)= cos(x)
f ’(0) = cos (0) = 1

h(x)= -sin(x)
h ’(x)= -cos(x)
h ’(0) = -cos (0) = -1

f’(0) · h’(0) = 1 · -1 = -1
also stehen die Tangenten Senkrecht aufeinander

3) f(x) = $-4 \cdot \sin(\frac{2}{3}x - \frac{20}{3}\pi) = -4 \cdot \sin(\frac{2}{3}(x - 10\pi))$

a) A = | -4 | = 4   und p = $\frac{2\pi}{\frac{2}{3}} = 3\pi$

b) f(x) = $-4 \cdot \sin(\frac{2}{3}x - \frac{20}{3}\pi) = -4 \cdot \sin(\frac{2}{3}(x - 10\pi))$ =

$-4 \cdot \sin(\frac{2}{3}(x + 9\pi - 10\pi))$ = $-4 \cdot \sin(\frac{2}{3}(x - \pi))$ = $-4 \cdot \sin(\frac{2}{3}(x + 3\pi - \pi)) =$

$-4 \cdot \sin(\frac{2}{3}(x + 2\pi))$

$x_{minR} = \pi$ nach rechts und $x_{minL} = 2\pi$ nach links.

4) alle wahr

5)
Symmetrie zur y-Achse:
cos(x) = cos(-x)
Punktsymmetrie zum Ursprung:
sin(x) = - sin(-x)

$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(-(\frac{\pi}{2} - x)) = \cos(x - \frac{\pi}{2})$

$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = -\sin(-(\frac{\pi}{2} - x)) = -\sin(x - \frac{\pi}{2})$

AUFGABE

Bemerkungen:
a) Bearbeiten Sie die Aufgaben, soweit Sie kommen.

1) Berechnen Sie die Spurpunkte der folgenden Geraden g in die
x1-x2-Ebene, in die x1-x3-Ebene und in die x2-x3-Ebene.

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2)
gegeben: Die Gerade g mit der Parameterform:

$$g:\quad \overset{-->}{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie rechnerisch die Gerade h, die senkrecht auf g steht und durch den
Punkt R(-25 |12 | 25) geht.

3)
gegeben: Die Gerade g mit der Parameterform:

$$g:\quad \overset{-->}{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix}$$

a)
Zeigen Sie, dass A (1 | 2 | 3) auf der Geraden liegt.

b)
Bestimmen Sie rechnerisch die Punkte P_1 und P_2, die von A (1 | 2 | 3)
die Entfernung 120 LE (Längeneinheiten) haben und auf der Geraden g liegen.

Lösungen:
1)
a) Berechnung des Spurpunkts in der x_1-x_2-Ebene

Der Spurpunkt sei S_{12} (x_{1S} | x_{2S} | x_{3S}) = S_{12} (x_{1S} | x_{2S} | 0). Da der Spurpunkt auf der Geraden g liegt ($S_{12} \in g$), erfüllen seine Koordinaten die Geradengleichung. Es gibt also ein r_s mit:

$$\begin{pmatrix} x_{1S} \\ x_{2S} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + r_s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff$$

$x_{1S} = 2 + 6 \cdot r_s$
$x_{2S} = 4 + 0 \cdot r_s$
$0 = 0 + 0 \cdot r_s$ <==> Es gibt unendlich viele Spurpunkte

b) Berechnung des Spurpunkts in der x_1-x_3-Ebene

Der Spurpunkt sei S_{13} (x_{1S} | x_{2S} | x_{3S}) = S_{12} (x_{1S} | 0 | x_{3S}). Da der Spurpunkt auf der Geraden g liegt ($S_{13} \in g$), erfüllen seine Koordinaten die Geradengleichung. Es gibt also ein r_s mit:

$$\begin{pmatrix} x_{1S} \\ 0 \\ x_{3S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + r_s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff$$

$x_{1S} = 2 + 6 \cdot r_s$
$0 = 4 + 0 \cdot r_s$ <==> 0 = 4 ==> Es gibt keinen Spurpunkt
$x_{3S} = 0 + 0 \cdot r_s$

c) Berechnung des Spurpunkts in der x_2-x_3-Ebene

Der Spurpunkt sei S_{23} (x_{1S} | x_{2S} | x_{3S}) = S_{23} (x_{1S} | 0 | x_{3S}). Da der Spurpunkt auf der Geraden g liegt ($S_{23} \in g$), erfüllen seine Koordinaten die Geradengleichung. Es gibt also ein r_s mit:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ x_{2S} \\ x_{3S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + r_s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff$$

$0 = 2 + 6 \cdot r_s$ <==> $r_S = -1/3$
$x_{2S} = 4 + 0 \cdot r_s$
$x_{3S} = 0 + 0 \cdot r_s$

Also:
$x_{1s} = 0$
$x_{2s} = 4$
$x_{3S} = 0$

Damit:
S_{23} (0 | 4| 0) ist Spurpunkt

2)
F(x_{1F} | x_{F2} | x_{F3}) sei der Punkt (Fußpunkt), der auf g und h liegt:

$$\begin{pmatrix} x_{1F} \\ x_{2F} \\ x_{3F} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t_F \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_{1F} \\ x_{2F} \\ x_{3F} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+10t_F \\ 2-20t_F \\ 3-20t_F \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x_{1F} & = & 1+10t_F \\ x_{2F} & = & 2-20t_F \\ x_{3F} & = & 3-20t_F \end{matrix}$$

Es gilt außerdem:

$$\begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} \perp \overset{-->}{FR} \;\; <==>$$

$$\begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} -25-x_{1F} \\ 12-x_{2F} \\ 25-x_{3F} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} -25-(1+10t_F) \\ 12-(2-20t_F) \\ 25-(3-20t_F) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} -26-10t_F \\ 10+20t_F \\ 22+20t_F \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -26-10t_F \\ 10+20t_F \\ 22+20t_F \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$10\cdot(-26-10t_F) + -20\cdot(10+20t_F) + -20\cdot(22+20t_F) = 0 \Leftrightarrow -260-100t_F \;\; -200 -400t_F -440 - 400t_F = 0 \Leftrightarrow -900 -900t_F = 0 \Leftrightarrow t_F = -1$
also:

$$\begin{pmatrix} x_{1F} \\ x_{2F} \\ x_{3F} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t_F \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 22 \\ 23 \end{pmatrix}, \quad also: \quad F(-9\,|\,22\,|\,23)$$

Dann gilt:

$$\overset{-->}{FR} = \begin{pmatrix} -25-(-9) \\ 12-22 \\ 25-23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 \\ -10 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und damit:}$$

$$\text{h: } \overset{-->}{x} = \begin{pmatrix} -9 \\ 22 \\ 23 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -16 \\ -10 \\ 2 \end{pmatrix}$$

3)
c) Gesucht: t_x mit

$$|\, t_x \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} | = 120$$

$$|\, t_x \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} | = | \begin{pmatrix} 10t_x \\ -20t_x \\ -20t_x \end{pmatrix} | = \sqrt{(10t_x)^2 + (-20t_x)^2 + (-20t_x)^2} = \sqrt{900t^2{}_x} = 30\sqrt{t^2{}_x}$$

$$30\sqrt{t^2{}_x} = 120 \;\Leftrightarrow\; \sqrt{t^2{}_x} = 4 \;\Leftrightarrow\; |\, t_x \,| = 4 \;\Leftrightarrow\; t_{x1} = 4,\, t_{x2} = -4$$

also:

$$\overset{-->}{OP_1} = \overset{-->}{OA} + t_x \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 \\ -78 \\ -77 \end{pmatrix}$$

$$\overset{-->}{OP_2} = \overset{-->}{OA} + t_x \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -39 \\ 82 \\ 83 \end{pmatrix}, \quad also\, P_1(41 \,|\, -78 \,|\, -77),\; P_2(-39 \,|\, 82 \,|\, 83)$$

AUFGABE

1)
Geben Sie die Gleichung der y-Achse an.

2)
Verschieben Sie die Normalparabel um 2 LE nach links.
Wie heißt die Funktionsgleichung dieser verschobenen Normalparabel?

3) Gegeben ist die Funktion g mit der Funktionsgleichung
$g(x) = (\sin(x) + \pi)^2 - \sqrt{x}$
Berechnen Sie (nur Term angeben, nicht vereinfachen):
$g(x^2 + \pi)$

4) Bestimmen Sie die Definitionsmenge und die Wertemenge der folgenden Funktion:
$f(x) = \sqrt{x}$

5) Geben Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen an:
(c, k sind **konstante** Werte)
a) $h_1(x) = g(x) + c$
b) $h_2(x) = k \cdot g(x)$
c) $h_3(x) = g(x) + h(x)$
d) $h_4(x) = 10 \cdot 5$
e) $h_5(x) = 3 \cdot x^7 + 10$
f) $h_6(x) = x$
g) $h_7(x) = k/c$

6) Eine Parabel 4. Ordnung hat in O(0 | 0) eine waagrechte Tangente und in P(-2 | 2) einen Wendepunkt mit waagrechter Tangente.
Wie heisst die Funktionsgleichung dieser Parabel ?
Bemerkung:
Geben Sie nur die Bestimmungsgleichungen an. Die Aufösung eines LGS muss nicht gemacht werden.

Lösungen:
1)
x = 0

2)
f (x) = (x+2)²

3)
$g(x^2+\pi) = (\sin(x^2+\pi)+\pi)^2 - \sqrt{x^2+\pi}$

4)
D = {x $\in$ R | x >= 0}
Z = R
W = {y $\in$R | y >= 0}

5)
a) $h_1'(x) = g'(x)$
b) $h_2'(x) = k \cdot g'(x)$
c) $h_3'(x) = g'(x) + h'(x)$
d) $h_4'(x) = 0$
e) $h_5'(x) = 21 \cdot x^6$
f) $h_6'(x) = 1$
g) $h_7'(x) = 0$

6)
$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$
$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$
$f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$

a) O(0 | 0) $\in K_f$
$0 = a \cdot 0^4 + b \cdot 0^3 + c \cdot 0^2 + d \cdot 0 + e$
$e = 0$

b) e = 0 eingesetzt in $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ ergibt:
$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx$

c) O(0 | 0) hat eine waagrechte Tangente
f '(0) = 0
$4a \cdot 0^3 + 3b \cdot 0^2 + 2c \cdot 0 + d = 0$
$d = 0$

d) d = 0 eingesetzt in $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx$ ergibt:
$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2$

e) P(-2 | 2) $\in K_f$

$$2 = a \cdot (-2)^4 + b \cdot (-2)^3 + c \cdot (-2)^2$$
$$2 = 16a - 8b + 4c$$
$$1 = 8a - 4b + 2c \quad (G1)$$

f) P(-2 | 2) ist Wendepunkt, also f ''(-2) = 0
$$12a \cdot (-2)^2 + 6b \cdot (-2) + 2c = 0$$
$$48a - 12b + 2c = 0$$
$$24a - 6b + c = 0 \quad (G2)$$

g) P(-2 | 2) hat eine waagrechte Tangente
f '(-2) = 0
$$4a \cdot (-2)^3 + 3b \cdot (-2)^2 + 2c \cdot (-2) = 0$$
$$-32a + 12b - 4c = 0$$
$$-8a + 3b - c = 0 \quad (G3)$$

h) Mit TR (Taschenrechner), Additionsverfahren oder Gausscher Algorithmus folgt aus (G1), (G2) und (G3):
$$a = \frac{3}{8},\ b = 2,\ c = 3$$
i) Ergebnis:
$$f(x) = \frac{3}{8}x^4 + 2x^3 + 3x^2$$