Elektrotechnik ohne Differentialgleichungen

Beschreiben des dynamisches Verhaltens von elektrotechnischen Größen mit Hilfe der elementaren Grundrechenarten und ohne Verwendung höherer Mathematik anhand ausgewählter Übungsaufgaben und mit Unterstützung einer Tabellenkalkulation wie z.B. EXCEL.

Verwandte Themengebiete:
Physik - Elektrotechnik - Folgen in der Mathematik - EDV (Tabellenkalkulation)

Bemerkungen:
Die Dimensionen sind wie folgt angegeben und werden bei den folgenden Rechnungen nicht immer angegeben, aber stillschweigend benutzt.

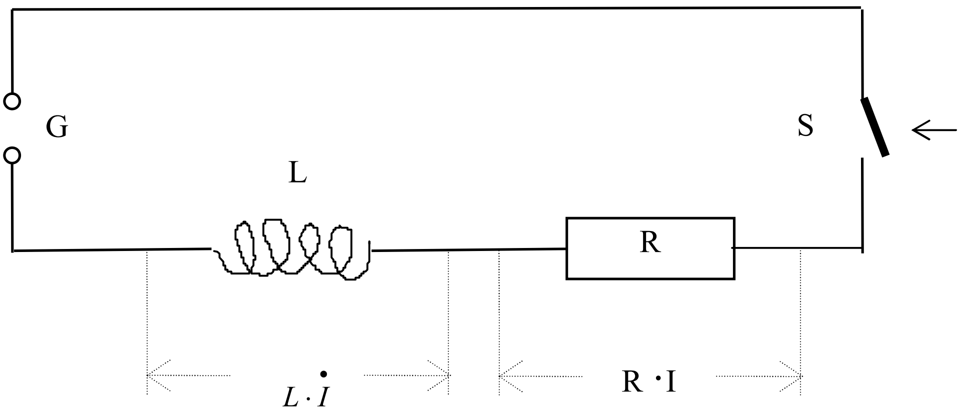
Physikalische Größe	Dim
Zeit (t)	s
Strom (I)	A
Spannung (U)	V
Widerstand (R)	Ω
Kapazität (C)	1 F
Eigeninduktivität (L)	Vs/A

Wichtige Vorbemerkung:

Die elektrischen Größen Q(t), I(t), U(t), usw. werden zu den Zeitpunkten $0 \cdot \Delta t$, $1 \cdot \Delta t$, $2 \cdot \Delta t$, $3 \cdot \Delta t$, ... also allgemein nach dem Zeitpunkt $t_n = n \cdot \Delta t$ betrachtet.
Man definiert dann:
$Q(t_n) = Q_n$
$I(t_n) = I_n$
$U(t_n) = U_n$
usw.

1) Die Ladekurve der Spule

Eine Spule L mit dem Widerstand R ist an einer Spannungsquelle G angeschlossen.
Dann wird der Schalter S geschlossen.



1) Es gilt zu jedem Zeitpunkt t (aus elektrotechnischen Gründen):

$G = R \cdot I(t) + L \cdot \dot{I}(t)$

Daraus folgt für die Stromänderung zu jedem Zeitpunkt t:

$$\dot{I}(t) = (G - I(t) \cdot R) / L$$

Damit gilt auch zu jedem Zeitpunkt t_n (=n ·R)

$$\dot{I}(t_n) = (G - I(t_n) \cdot R) / L$$

oder anders geschrieben:

$$\dot{I}_n = (G - I_n \cdot R) / L \qquad \text{(L1)}$$

2) Der Strom zum Zeitpunkt 0 beträgt:

$$I_0 = 0 \qquad \text{(L2)}$$

3) Die Stromstärke, die zum Zeitpunkt t_{n+1} (nach n+1 Zeitabschnitten Δt) fließt, kann mit folgender Formel nicht exakt berechnet, sondern nur **angenähert** werden, da die Stromänderung $\dot{I}$ während des Zeitraums (Zeitabschnitts) Δt nicht konstant ist. Damit man aber eine gute Annäherung erreichen kann, muß man den Zeitraum Δt hinreichend klein wählen.

$$I(t_{n+1}) \approx I(t_n) + \dot{I}(t_n) \cdot \Delta t$$

oder anders geschrieben:

$$I_{n+1} \approx I_n + \dot{I}_n \cdot \Delta t \qquad \text{(L3)}$$

Mit diesen 3 Formeln kann man die Stromstärke nach **jedem** Zeitraum Δt berechnen:

$$\begin{tikzcd}
I_0 \arrow[r, "2"] \arrow[d, "1"'] & I_1 \arrow[r, "4"] \arrow[d, "3"'] & I_2 \arrow[r, "6"] \arrow[d, "5"'] & I_3 \arrow[d, "7"'] & \cdots\cdots \\
\dot{I}_0 \arrow[ur, "2"] & \dot{I}_1 \arrow[ur, "4"] & \dot{I}_2 \arrow[ur, "6"] & \dot{I}_3 &
\end{tikzcd}$$

Konkretes Beispiel:
Voraussetzungen: G = 400 V; L = 10 Vs/A; R = 1 Ω; Δt = 1 s

n	t_n	$I(t_n)$	$\dot{I}(t_n)$
0	0 · 1s = 0s	0A	= (400V - 0A*1Ω) / 10Vs/A = 40A/s
1	1 · 1s = 1s	0A + 40A/s · 1s = 40A	= (400V - 40A*1Ω) / 10Vs/A = 36A/s
2	2 · 1s = 2s	40A + 36A/s · 1s = 76A	= (400V - 76A*1Ω) / 10Vs/A = 32,4A/s
3	3 · 1s = 3s	76A + 32,4A/s · 1s = 108,4A	= (400V - 108,4A*1Ω) / 10Vs/A = 29,16A/s
...			

Umsetzung in Excel

a) Geben Sie für G, R. L und Δt die von Ihnen bestimmten (z.B. G = 400 V, R = 1 Ω; L = Vs/A, Δt = 0,1 s) Werte in die von Ihnen vorgesehenen Zellen ein.

Erzeugen Sie die Wertetabelle für n, t_n, I_n und $\dot{I}_n$ in der die Zeit t_n (= n ·Δt) nach n Zeitabschnitten, die Stromstärke I_n und die Stromstärkenänderung $\dot{I}_n$ in Abhängigkeit von 0, 1, 2, ... , n Zeitabschnitten dargestellt wird.

b) Der exakte Wert der Stromstärke I in Abhängigkeit von der Zeit t beträgt:

$$Iex(t) = \frac{G}{R} \cdot (1 - e^{-\frac{Rt}{L}})$$

Nehmen Sie den exakten Wert der Stromstärke Iex_n nach n Zeiteinheiten in die Wertetabelle mit auf.

c) Erzeugen Sie ein Diagramm, in dem I_n und Iex_n in Abhängigkeit von $t = t_n$ dargestellt wird.
Der letzte Eintrag aus der Wertetabelle soll 99,9% der Endstromstärke anzeigen.
D.h. man muß ca. $\frac{7L}{R \cdot \Delta t}$ Einträge aus der Wertetabelle für das Diagramm benutzen.

Bemerkung (für mathematisch Interessierte):

Mit (L1) in (L3) eingesetzt und (L2) ergibt sich:

$$\mathbf{I_0 = 0}$$

$$\mathbf{I_{n+1} \approx I_n + (G - I_n \cdot R)/L \cdot \Delta t} \quad \text{für n >=1}$$

Excel-Tabelle

Spulenladevorgang (siehe zugehörige Aufgabe)

Konstanten:

Nur Werte in eingerahmte Zellen eingeben

Spannungsquelle	G =	100	V
Spule	L =	10	Vs/A
Widerstand	R =	1	V/A
Länge eines Zeitabschnitts	dt =	1	s

Anfangsbedingungen:

Anfangsstrom in der Spule	I(0) =	0	A

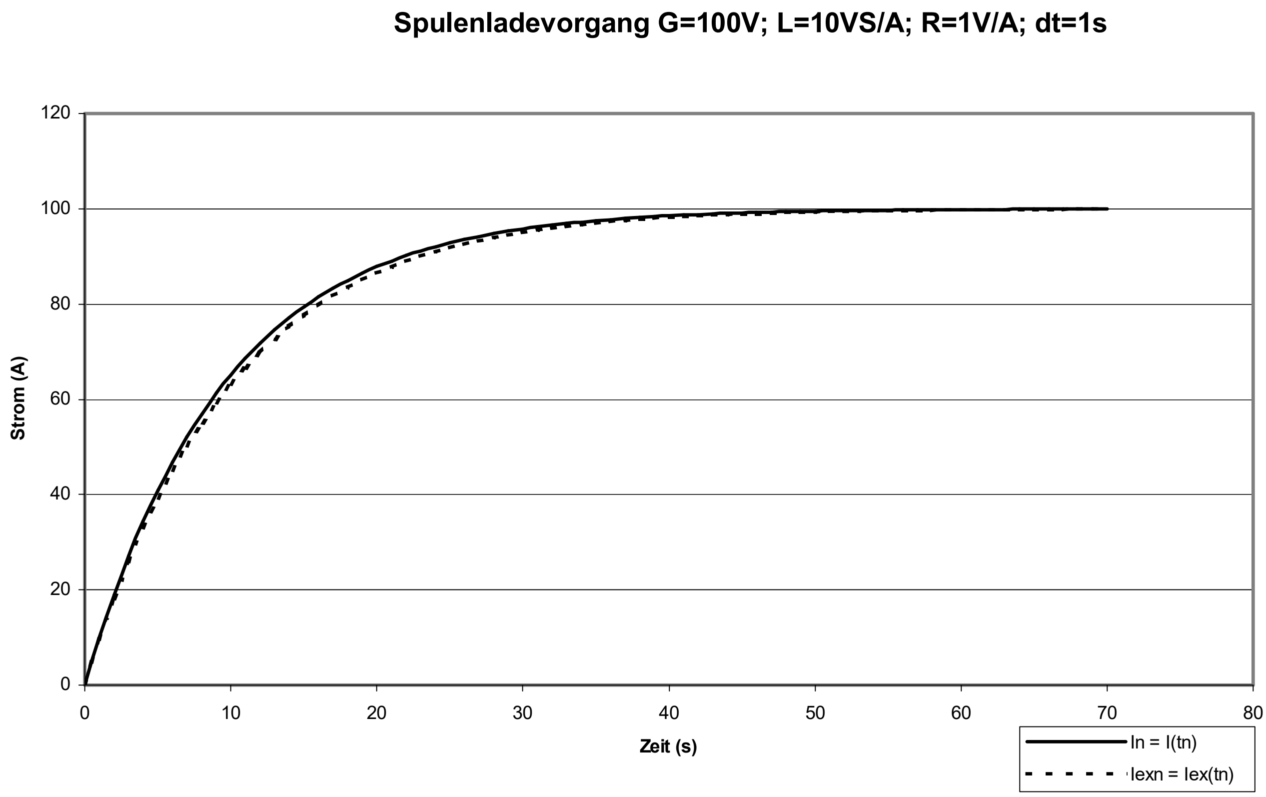
Diagramm:

Anzahl der Einträge in der Wertetabelle	N =	70

Wertetabelle:

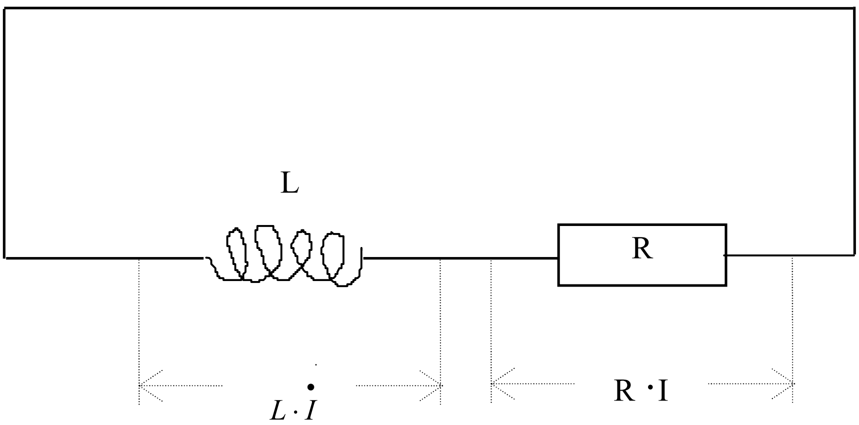
n	t_n	$I_n = I(t_n)$	$I'_n = I'(t_n)$	$Iex_n = Iex(t_n)$
0	0	0	10	0
1	1	10	9	9,5162582
2	2	19	8,1	18,1269247
3	3	27,1	7,29	25,9181779
4	4	34,39	6,561	32,9679954
5	5	40,951	5,9049	39,346934
6	6	46,8559	5,31441	45,1188364
7	7	52,17031	4,782969	50,3414696
8	8	56,953279	4,3046721	55,0671036
9	9	61,2579511	3,87420489	59,343034
10	10	65,132156	3,4867844	63,2120559
11	11	68,6189404	3,13810596	66,7128916
12	12	71,7570464	2,82429536	69,8805788
13	13	74,5813417	2,54186583	72,7468207
14	14	77,1232075	2,28767925	75,3403036
15	15	79,4108868	2,05891132	77,686984
16	16	81,4697981	1,85302019	79,8103482
17	17	83,3228183	1,66771817	81,7316476
18	18	84,9905365	1,50094635	83,4701112
19	19	86,4914828	1,35085172	85,0431381
20	20	87,8423345	1,21576655	86,4664717
21	21	89,0581011	1,09418989	87,7543572
22	22	90,152291	0,9847709	88,9196842
23	23	91,1370619	0,88629381	89,9741156
24	24	92,0233557	0,79766443	90,9282047
25	25	92,8210201	0,71789799	91,7915001
26	26	93,5389181	0,64610819	92,5726422
27	27	94,1850263	0,58149737	93,2794487
28	28	94,7665237	0,52334763	93,9189937
29	29	95,2898713	0,47101287	94,497678
30	30	95,7608842	0,42391158	95,0212932

Excel-Diagramm



2) Die Entladekurve der Spule

Eine Spule L mit dem Widerstand R ist an einer Spannungsquelle G angeschlossen.
Nach einer gewissen Zeit befindet sich dann an der Spule die Endspannung G.
Dann wird die Spannungsquelle entfernt und die Spule kurzgeschlossen.



1) Es gilt zu jedem Zeitpunkt t (aus elektrotechnischen Gründen):

$R \cdot I(t) = L \cdot \dot{I}(t)$

Daraus folgt für die Stromänderung zu jedem Zeitpunkt t:

$\mathbf{\dot{I}(t) = R \cdot I(t) / L}$

Damit gilt auch zu jedem Zeitpunkt t_n (=n ·R)

$\mathbf{\dot{I}(t_n) = R \cdot I(t_n) / L}$

oder anders geschrieben:

$\mathbf{\dot{I}_n = R \cdot I_n / L}$ **(L11)**

2) Der Strom zum Zeitpunkt 0 beträgt:

$\mathbf{I_0 = G/R}$ (L21)

3) Die Stromstärke, die zum Zeitpunkt t_{n+1} (nach n+1 Zeitabschnitten Δt) fließt, kann mit folgender Formel nicht exakt berechnet, sondern nur **angenähert** werden, da die Stromänderung $\dot{I}$ während des Zeitraums (Zeitabschnitts) Δt nicht konstant ist. Damit man aber eine gute Annäherung erreichen kann, muß man den Zeitraum Δt hinreichend klein wählen.

$\mathbf{I(t_{n+1}) \approx I(t_n) - \dot{I}(t_n) \cdot \Delta t}$

oder anders geschrieben:

$\mathbf{I_{n+1} \approx I_n - \dot{I}_n \cdot \Delta t}$ (L31)

Damit diesen 3 Formeln kann man die Stromstärke nach **jedem** Zeitraum Δt berechnen:

$$\begin{tikzcd}
I_0 \arrow[r, "2"] \arrow[d, "1"'] & I_1 \arrow[r, "4"] \arrow[d, "3"'] & I_2 \arrow[r, "6"] \arrow[d, "5"'] & I_3 \arrow[d, "7"'] & \cdots\cdots \\
\dot{I}_0 \arrow[ur, "2"] & \dot{I}_1 \arrow[ur, "4"] & \dot{I}_2 \arrow[ur, "6"] & \dot{I}_3 &
\end{tikzcd}$$

Konkretes Beispiel:
Voraussetzungen: G = 400 V; L = 10 Vs/A; R = 1 Ω; Δt = 1 s

n	t_n	I(t_n)	$\dot{I}$ (t_n)
0	0 · 1 s = 0s	400V / 1Ω = 400A	= 400A ·1Ω / 10Vs/A = 40A/s
1	1 · 1 s = 1s	400A - 40A/s ·1s = 360A	= 360A ·1Ω / 10Vs/A = 36A/s
2	2 · 1 s = 2s	360A - 36A/s ·1s = 324A	= 324A ·1Ω / 10Vs/A = 32,4A/s
3	3 · 1 s = 3s	324V - 32,4A/s ·1s = 291,6A	= 291,6A ·1Ω / 10Vs/A = 29,16A/s
...			

Umsetzung in Excel

a) Geben Sie für G, R. L und Δt die von Ihnen bestimmten (z.B. G = 400 V, R = 1 Ω; L = Vs/A, Δt = 0,1 s) Werte in die von Ihnen vorgesehenen Zellen ein.

Erzeugen Sie die Wertetabelle für n, t_n, I_n und $\dot{I}_n$, in der die Zeit t_n (= n ·Δt) nach n Zeitabschnitten, die Stromstärke I_n und die Stromstärkenänderung $\dot{I}_n$ in Abhängigkeit von 0, 1, 2, ... , n Zeitabschnitten dargestellt wird.

b) Der exakte Wert der Stromstärke I in Abhängigkeit von der Zeit t beträgt:

$$Iex(t) = \frac{G}{R} \cdot e^{-\frac{Rt}{L}}$$

Nehmen Sie den exakten Wert der Stromstärke Iex_n nach n Zeiteinheiten in die Wertetabelle mit auf.

c) Erzeugen Sie ein Diagramm, in dem I_n und Iex_n in Abhängigkeit von $t = t_n$ dargestellt wird. Der letzte Eintrag aus der Wertetabelle soll 0,1% der Anfangsstromstärke anzeigen.
D.h. man muß ca. $\frac{7L}{R \cdot \Delta t}$ Einträge aus der Wertetabelle für das Diagramm benutzen.

Bemerkung (für mathematisch Interessierte):

Mit (L11) in (L31) eingesetzt und (L21) ergibt sich:

$\mathbf{I_0 = GR}$

$\mathbf{I_{n+1} \approx I_n - (R \cdot I_n / L) \cdot \Delta t}$ für n >=1

Excel-Tabelle

Spulenentladevorgang (siehe zugehörige Aufgabe)

Konstanten:

Nur Werte in eingerahmte Zellen eingeben

Spannungsquelle	G =	400	V
Spule	L =	10	Vs/A
Widerstand	R =	1	V/A
Länge eines Zeitabschnitts	dt =	1	s

Anfangsbedingungen:

Anfangsstrom in der Spule	I(0) =	400	A

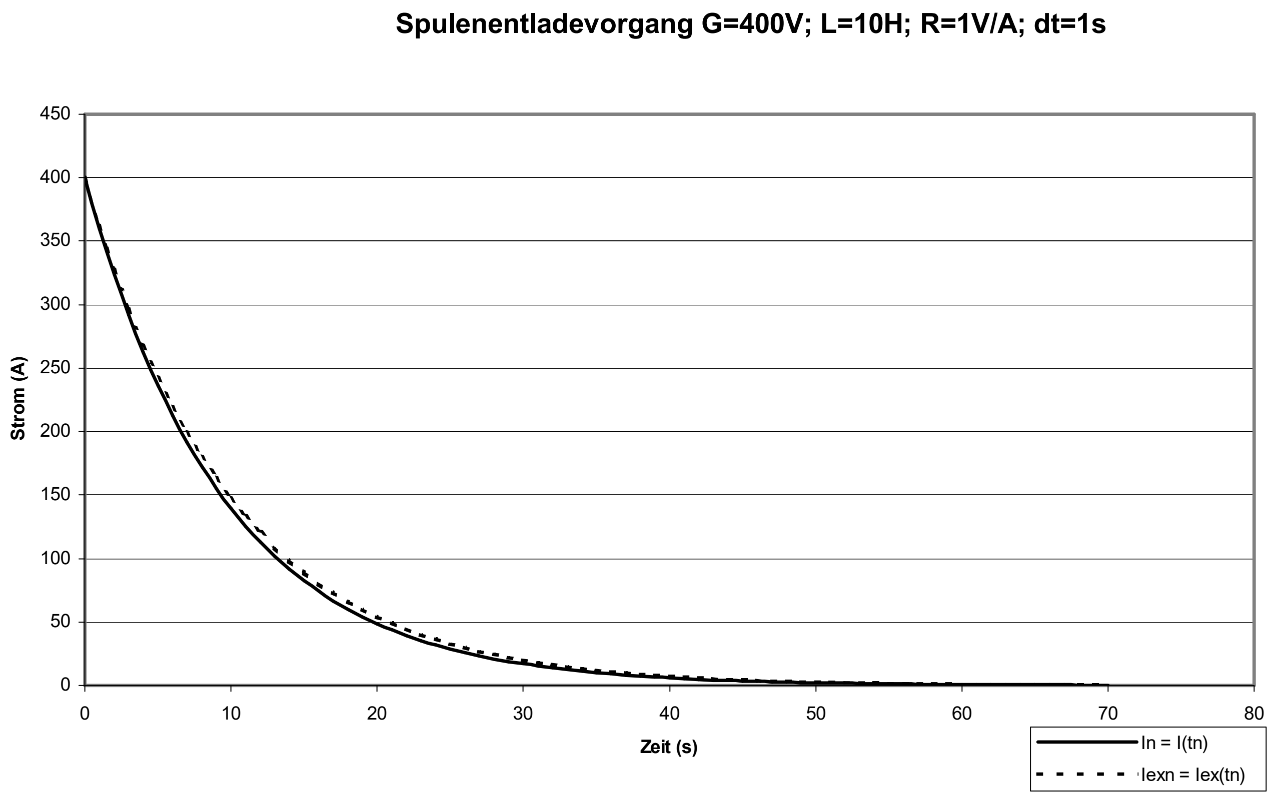
Diagramm:

Anzahl der Einträge in der Wertetabelle	N =	70

Wertetabelle:

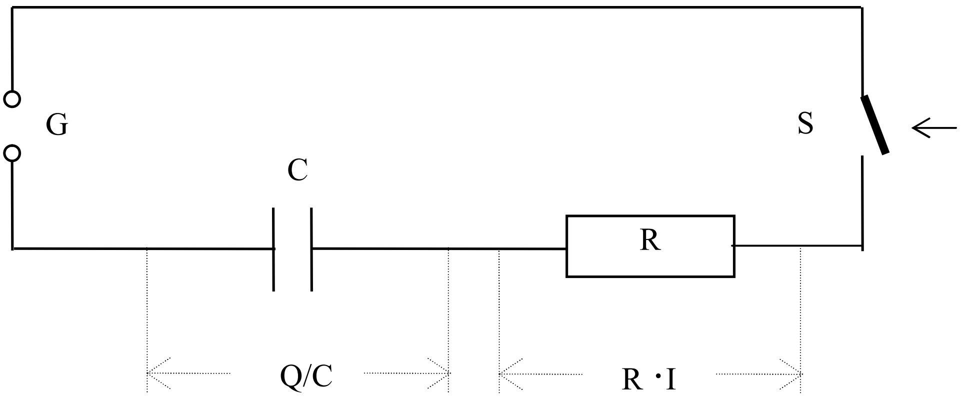
n	t_n	$I_n = I(t_n)$	$I'_n = I'(t_n)$	$Iex_n = Iex(t_n)$
0	0	400	-40	400
1	1	360	-36	361,934967
2	2	324	-32,4	327,492301
3	3	291,6	-29,16	296,327288
4	4	262,44	-26,244	268,128018
5	5	236,196	-23,6196	242,612264
6	6	212,5764	-21,25764	219,524654
7	7	191,31876	-19,131876	198,634122
8	8	172,186884	-17,2186884	179,731586
9	9	154,968196	-15,4968196	162,627864
10	10	139,471376	-13,9471376	147,151776
11	11	125,524238	-12,5524238	133,148433
12	12	112,971815	-11,2971815	120,477685
13	13	101,674633	-10,1674633	109,012717
14	14	91,5071698	-9,15071698	98,6387856
15	15	82,3564528	-8,23564528	89,2520641
16	16	74,1208076	-7,41208076	80,7586072
17	17	66,7087268	-6,67087268	73,0734096
18	18	60,0378541	-6,00378541	66,1195553
19	19	54,0340687	-5,40340687	59,8274477
20	20	48,6306618	-4,86306618	54,1341133
21	21	43,7675957	-4,37675957	48,9825713
22	22	39,3908361	-3,93908361	44,3212633
23	23	35,4517525	-3,54517525	40,1035375
24	24	31,9065772	-3,19065772	36,2871813
25	25	28,7159195	-2,87159195	32,8339994
26	26	25,8443276	-2,58443276	29,7094313
27	27	23,2598948	-2,32598948	26,8822051
28	28	20,9339053	-2,09339053	24,3240251
29	29	18,8405148	-1,88405148	22,009288
30	30	16,9564633	-1,69564633	19,9148273

Excel-Diagramm



3) Die Ladekurve des Kondensators

Ein Widerstand R und ein (entladener) Kondensator C sind an einer Spannungsquelle G angeschlossen.
Dann wird der Schalter S geschlossen.



1) Es gilt zu jedem Zeitpunkt t (aus elektrotechnischen Gründen):
$G = Q(t) / C + R \cdot I(t)$
Daraus folgt für die Stromstärke zu jedem Zeitpunkt t:
$I(t) = (GC - Q(t)) / RC$
Damit gilt auch zu jedem Zeitpunkt t_n (=n ·R)
$I(t_n) = (GC - Q(t_n)) / RC$
oder anders geschrieben:

$$\mathbf{I_n = (GC - Q_n) / RC} \qquad \text{(C1)}$$

2) Die Ladungsmenge zum Zeitpunkt 0 beträgt:

$$\mathbf{Q_0 = 0} \qquad \text{(C2)}$$

3) Die Ladungsmenge, die sich zum Zeitpunkt t_{n+1} (nach n+1 Zeitabschnitten) auf dem Kondensator befindet, kann mit folgender Formel nicht exakt berechnet, sondern nur **angenähert** werden, da die Stromstärke I während des Zeitraums (Zeitabschnitts) Δt nicht konstant ist. Damit man aber eine gute Annäherung erreichen kann, muß man den Zeitraum Δt hinreichend klein wählen.

$$\mathbf{Q_{n+1} \approx Q_n + I_n \cdot \Delta t} \qquad \text{(C3)}$$

Mit diesen 3 Formeln kann man die Stromstärke nach **jedem** Zeitraum Δt berechnen:

$$\begin{tikzcd}
Q_0 \arrow[r, "2"] \arrow[d, "1"'] & Q_1 \arrow[r, "4"] \arrow[d, "3"'] & Q_2 \arrow[r, "6"] \arrow[d, "5"'] & Q_3 \arrow[d, "7"'] & \cdots\cdots \\
I_0 \arrow[ur, "2"] & I_1 \arrow[ur, "4"] & I_2 \arrow[ur, "6"] & I_3 &
\end{tikzcd}$$

Konkretes Beispiel:
Voraussetzungen: G = 200 V; R = 10 Ω; C = 1 F; Δt = 1 s

n	t_n	$Q(t_n)$	$I(t_n)$
0	0 · 1s = 0s	0C	(200V ·1C - 0C) / 10Ω ·1C = 20A
1	1 · 1s = 1s	0C + 20A · 1s = 20C	(200V ·1C - 20C) / 10Ω ·1C = 18A
2	2 · 1s = 2s	20C + 18A · 1s = 38C	(200V ·1C -38C) / 10Ω ·1C = 16,2A
...			

Umsetzung in Excel

a) Geben Sie für R, C, G und Δt die von Ihnen bestimmten (z.B. R = 1 Ω; C = 2 F; G = 40 V; Δt = 1 s) Werte in die von Ihnen vorgesehenen Zellen ein.
Erzeugen Sie die Wertetabelle für n, t_n, Q_n und I_n, in der die Zeit t_n (= n · Δt) nach n Zeitabschnitten, die Ladungsmenge Q_n und der Strom I_n am Kondensator in Abhängigkeit von 0, 1, 2, ... , n Zeitabschnitten dargestellt wird.

b) Der exakte Wert der Stromstärke I in Abhängigkeit von der Zeit t beträgt:

$$Iex(t) = \frac{G}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

Nehmen Sie den exakten Wert der Stromstärke Iex_n nach n Zeiteinheiten in die Wertetabelle mit auf.

c) Erzeugen Sie ein Diagramm, in dem I_n und Iex_n in Abhängigkeit von $t = t_n$ dargestellt wird.
Der letzte Einträg aus der Wertetabelle soll 99,9% der Endstromstärke anzeigen.
D.h. man muß ca. $\frac{7CR}{\Delta t}$ Einträge aus der Wertetabelle für das Diagramm benutzen.

d) Nehmen Sie noch die Spannung U_n und die exakte Spannung Uex_n am Kondensator (in Abhängigkeit von 0, 1, 2, ... , n Zeitabschnitten) in die Wertetabelle mit auf.

Bemerkung:
Der exakte Wert der Spannung U in Abhängigkeit von der Zeit t beträgt:

$$Uex(t) = G \cdot (1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

e) Erzeugen Sie ein Diagramm, in dem I_n und Iex_n, U_n und Uex_n in Abhängigkeit von $t = t_n$ dargestellt wird.

Bemerkung (für mathematisch Interessierte):

Mit (C1) in (C3) eingesetzt und (C2) ergibt sich:

$$\mathbf{Q_0 = 0}$$

$$\mathbf{Q_{n+1} \approx Q_n + (GC - Q_n) / RC \cdot \Delta t} \qquad \text{für } n >= 1$$

Excel-Tabelle

Kondensatorladevorgang (siehe zugehörige Aufgabe)

Konstanten:

Nur Werte in eingerahmte Zellen eingeben

Spannungsquelle	G =	200	V
Widerstand	R =	10	V/A
Kapazität des Kondensators:	C =	1	F
Länge eines Zeitabschnitts	dt =	1	s

Anfangsbedingungen:

Anfangsladung am Kondensator	Q(0) =	0	C

Diagramm:

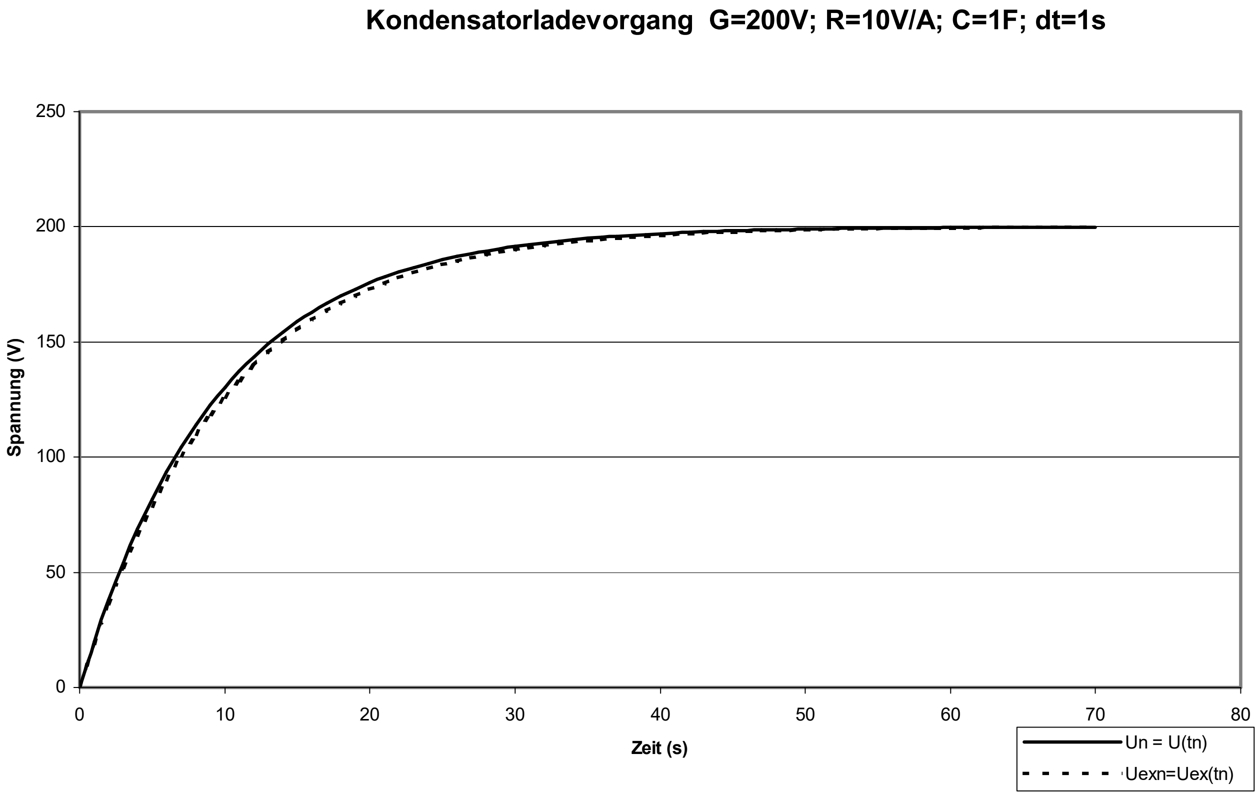
Anzahl der Einträge in der Wertetabelle	N =	70

Wertetabelle:

n	t_n	$Q_n = Q(t_n)$	$I_n = I(t_n)$	$Iex_n = Iex(t_n)$	$U_n = U(t_n)$	$Uex_n = Uex(t_n)$
0	0	0	20	20	0	0
1	1	20	18	18,0967484	20	19,0325164
2	2	38	16,2	16,3746151	38	36,2538494
3	3	54,2	14,58	14,8163644	54,2	51,8363559
4	4	68,78	13,122	13,4064009	68,78	65,9359908
5	5	81,902	11,8098	12,1306132	81,902	78,6938681
6	6	93,7118	10,62882	10,9762327	93,7118	90,2376728
7	7	104,34062	9,565938	9,93170608	104,34062	100,682939
8	8	113,906558	8,6093442	8,98657928	113,906558	110,134207
9	9	122,515902	7,74840978	8,13139319	122,515902	118,686068
10	10	130,264312	6,9735688	7,35758882	130,264312	126,424112
11	11	137,237881	6,27621192	6,65742167	137,237881	133,425783
12	12	143,514093	5,64859073	6,02388424	143,514093	139,761158
13	13	149,162683	5,08373166	5,45063586	149,162683	145,493641
14	14	154,246415	4,57535849	4,93193928	154,246415	150,680607
15	15	158,821774	4,11782264	4,4626032	158,821774	155,373968
16	16	162,939596	3,70604038	4,03793036	162,939596	159,620696
17	17	166,645637	3,33543634	3,65367048	166,645637	163,463295
18	18	169,981073	3,00189271	3,30597776	169,981073	166,940222
19	19	172,982966	2,70170344	2,99137238	172,982966	170,086276
20	20	175,684669	2,43153309	2,70670566	175,684669	172,932943
21	21	178,116202	2,18837978	2,44912857	178,116202	175,508714
22	22	180,304582	1,9695418	2,21606317	180,304582	177,839368
23	23	182,274124	1,77258762	2,00517687	182,274124	179,948231
24	24	184,046711	1,59532886	1,81435907	184,046711	181,856409
25	25	185,64204	1,43579598	1,64169997	185,64204	183,583
26	26	187,077836	1,29221638	1,48547156	187,077836	185,145284
27	27	188,370053	1,16299474	1,34411025	188,370053	186,558897
28	28	189,533047	1,04669527	1,21620125	189,533047	187,837987
29	29	190,579743	0,94202574	1,1004644	190,579743	188,995356

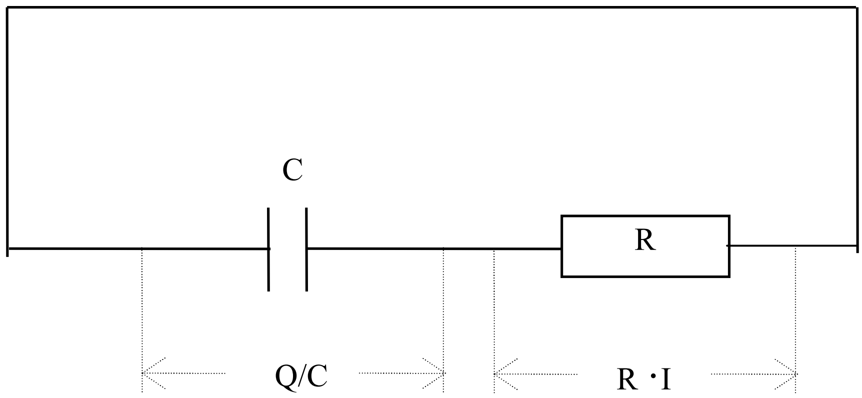
30	30	191,521768	0,84782317	0,99574137	191,521768	190,042586

Excel-Diagramm



4) Die Entladekurve des Kondensators

Ein voll geladener Kondensator C mit der Anfangsspannung G wird über einen Widerstand R entladen.



1) Es gilt zu jedem Zeitpunkt t (aus elektrotechnischen Gründen):
$Q(t) / C = R \cdot I(t)$
Daraus folgt für die Stromstärke zu jedem Zeitpunkt t:
$I(t) = Q(t) / RC$
Damit gilt auch zu jedem Zeitpunkt t_n ($=n \cdot R$)
$I(t_n) = Q(t_n) / RC$
oder anders geschrieben:

$$\mathbf{I_n = Q_n / RC} \qquad \text{(C11)}$$

2) Die Ladungsmenge zum Zeitpunkt 0 beträgt ($U(0) = G$):

$$\mathbf{Q_0 = GC} \qquad \text{(C21)}$$

3) Die Ladungsmenge, die sich zum Zeitpunkt t_{n+1} (nach n+1 Zeitabschnitten) auf dem Kondensator befindet, kann mit folgender Formel nicht exakt berechnet, sondern nur **angenähert** werden, da die Stromstärke I während des Zeitraums (Zeitabschnitts) Δt nicht konstant ist. Damit man aber eine gute Annäherung erreichen kann, muß man den Zeitraum Δt hinreichend klein wählen.

$$\mathbf{Q_{n+1} \approx Q_n - I_n \cdot \Delta t} \qquad \text{(C31)}$$

Mit diesen 3 Formeln kann man die Stromstärke nach **jedem** Zeitraum Δt berechnen:

$$\begin{tikzcd}
Q_0 \arrow[r, "2"] \arrow[d, "1"'] & Q_1 \arrow[r, "4"] \arrow[d, "3"'] & Q_2 \arrow[r, "6"] \arrow[d, "5"'] & Q_3 \arrow[d, "7"'] & \cdots\cdots \\
I_0 \arrow[ur, "2"] & I_1 \arrow[ur, "4"] & I_2 \arrow[ur, "6"] & I_3 &
\end{tikzcd}$$

Konkretes Beispiel:
Voraussetzungen: G = 200 V; R = 10 Ω; C = 1 F; Δt = 1 s

n	t_n	$Q(t_n)$	$I(t_n)$
0	0 · 1s = 0s	200V · 1F = 200C	200C / 10Ω · 1F = 20A
1	1 · 1s = 1s	200C - 20A · 1s = 180C	180C / 10Ω · 1F = 18A
2	2 · 1s = 2s	180C - 18A · 1s = 162C	162C / 10Ω · 1F = 16,2A
...			

Umsetzung in Excel

a) Geben Sie für R, C, G und Δt die von Ihnen bestimmten (z.B. R = 1 Ω; C = 2 F; G = 40 V; Δt = 1 s) Werte in die von Ihnen vorgesehenen Zellen ein.
Erzeugen Sie die Wertetabelle für n, t_n, Q_n, und I_n, in der die Zeit t_n (= n · Δt) nach n Zeitabschnitten, die Ladungsmenge Q_n , und der Strom I_n und am Kondensator in Abhängigkeit von 0, 1, 2, ... , n Zeitabschnitten dargestellt wird.

b) Der exakte Wert der Stromstärke I in Abhängigkeit von der Zeit t beträgt:

$$Iex(t) = \frac{G}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

Nehmen Sie den exakten Wert der Stromstärke Iex_n nach n Zeiteinheiten in die Wertetabelle mit auf.

c) Erzeugen Sie ein Diagramm, in dem I_n und Iex_n in Abhängigkeit von $t = t_n$ dargestellt wird.
Der letzte Eintrag aus der Wertetabelle soll 0,1% der Anfangsstromstärke anzeigen.
D.h. man muß ca. $\frac{7CR}{\Delta t}$ Einträge aus der Wertetabelle für das Diagramm benutzen.

d) Nehmen Sie noch die Spannung U_n und die exakte Spannung Uex_n am Kondensator (in Abhängigkeit von 0, 1, 2, ... , n Zeitabschnitten) in die Wertetabelle mit auf.

Bemerkung:
Der exakte Wert der Spannung U in Abhängigkeit von der Zeit t beträgt:

$$Uex(t) = G \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

e) Erzeugen Sie ein Diagramm, in dem I_n und Iex_n, U_n und Uex_n in Abhängigkeit von $t = t_n$ dargestellt wird.

Bemerkung (für mathematisch Interessierte):
Mit (C11) in (C31) eingesetzt und (C21) ergibt sich:

$$\mathbf{Q_0 = GC}$$
$$\mathbf{Q_{n+1} \approx Q_n - (Q_n / RC) \cdot \Delta t} \qquad \text{für } n >= 1$$

Excel-Tabelle

Kondensatorentladevorgang (siehe zugehörige Aufgabe)

Konstanten:

Nur Werte in eingerahmte Zellen eingeben

Anfangsspannung am Kondensator:	G =	200	V
Widerstand	R =	10	V/A
Kapazität des Kondensators:	C =	1	F
Länge eines Zeitabschnitts	dt =	1	s

Anfangsbedingungen:

Anfangsladung am Kondensator	Q(0) =	200	C

Diagramm:

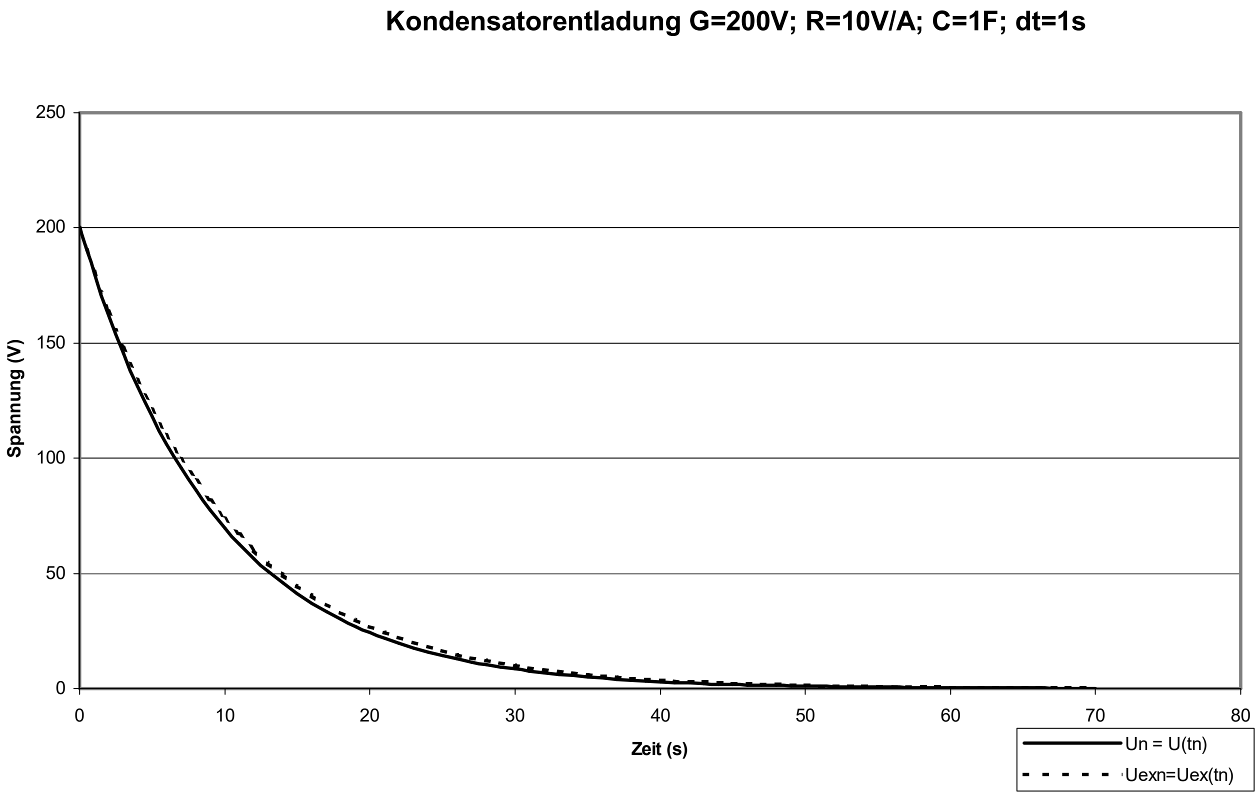
Anzahl der Einträge in der Wertetabelle	N =	70

Wertetabelle:

n	t_n	$Q_n = Q(t_n)$	$I_n = I(t_n)$	$Iex_n = Iex(t_n)$	$U_n = U(t_n)$	$Uex_n=Uex(t_n)$
0	0	200	20	20	200	200
1	1	180	18	18,0967484	180	180,967484
2	2	162	16,2	16,3746151	162	163,746151
3	3	145,8	14,58	14,8163644	145,8	148,163644
4	4	131,22	13,122	13,4064009	131,22	134,064009
5	5	118,098	11,8098	12,1306132	118,098	121,306132
6	6	106,2882	10,62882	10,9762327	106,2882	109,762327
7	7	95,65938	9,565938	9,93170608	95,65938	99,3170608
8	8	86,093442	8,6093442	8,98657928	86,093442	89,8657928
9	9	77,4840978	7,74840978	8,13139319	77,4840978	81,3139319
10	10	69,735688	6,9735688	7,35758882	69,735688	73,5758882
11	11	62,7621192	6,27621192	6,65742167	62,7621192	66,5742167
12	12	56,4859073	5,64859073	6,02388424	56,4859073	60,2388424
13	13	50,8373166	5,08373166	5,45063586	50,8373166	54,5063586
14	14	45,7535849	4,57535849	4,93193928	45,7535849	49,3193928
15	15	41,1782264	4,11782264	4,4626032	41,1782264	44,626032
16	16	37,0604038	3,70604038	4,03793036	37,0604038	40,3793036
17	17	33,3543634	3,33543634	3,65367048	33,3543634	36,5367048
18	18	30,0189271	3,00189271	3,30597776	30,0189271	33,0597776
19	19	27,0170344	2,70170344	2,99137238	27,0170344	29,9137238
20	20	24,3153309	2,43153309	2,70670566	24,3153309	27,0670566
21	21	21,8837978	2,18837978	2,44912857	21,8837978	24,4912857
22	22	19,695418	1,9695418	2,21606317	19,695418	22,1606317
23	23	17,7258762	1,77258762	2,00517687	17,7258762	20,0517687
24	24	15,9532886	1,59532886	1,81435907	15,9532886	18,1435907
25	25	14,3579598	1,43579598	1,64169997	14,3579598	16,4169997
26	26	12,9221638	1,29221638	1,48547156	12,9221638	14,8547156
27	27	11,6299474	1,16299474	1,34411025	11,6299474	13,4411025
28	28	10,4669527	1,04669527	1,21620125	10,4669527	12,1620125
29	29	9,42025739	0,94202574	1,1004644	9,42025739	11,004644

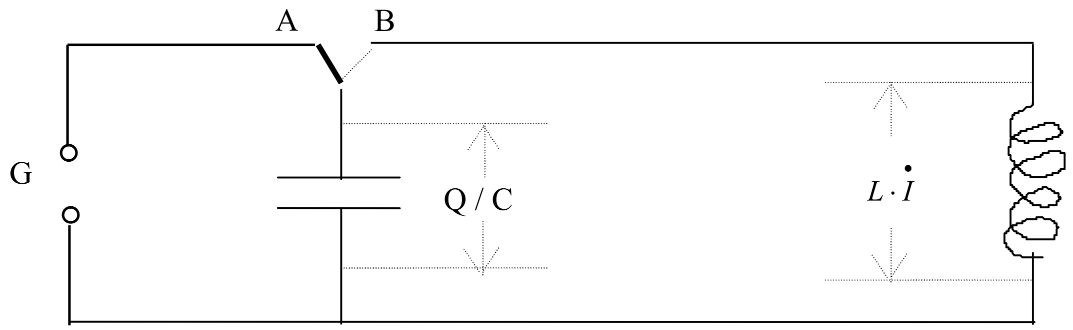
30	30	8,47823166	0,84782317	0,99574137	8,47823166	9,95741367

Excel-Diagramm



5) Der Schwingkreis

In der Schalterstellung A wird ein Kondensator C voll geladen, bis an ihm die Spannung G anliegt. Danach wird der Schalter in Stellung B gebracht, d.h. die Spule L und der Kondensator C sind direkt miteinander verbunden. Der Widerstand der Spule soll 0 Ω sein.



1) Es gilt zu jedem Zeitpunkt t (aus elektrotechnischen Gründen):

$Q(t) / C = L \cdot \dot{I}\,\mathbf{(t)}$

Daraus folgt für die Stromstärkenänderung zu jedem Zeitpunkt t:

$\dot{I}(t) = Q(t) / LC$

Damit gilt auch zu jedem Zeitpunkt t_n (=n ·R)

$\dot{I}(t_n) = Q(t_n) / LC$

oder anders geschrieben:

$\dot{I}_{\mathbf{n}} \mathbf{= Q_n / LC}$ (S1)

2) Die Ladungsmenge zum Zeitpunkt 0 beträgt (U(0) = G):

$\mathbf{Q_0 = GC}$ (S2)

3) Die Stromstärke zum Zeitpunkt 0 beträgt:

$\mathbf{I_0 = 0}$ (S3)

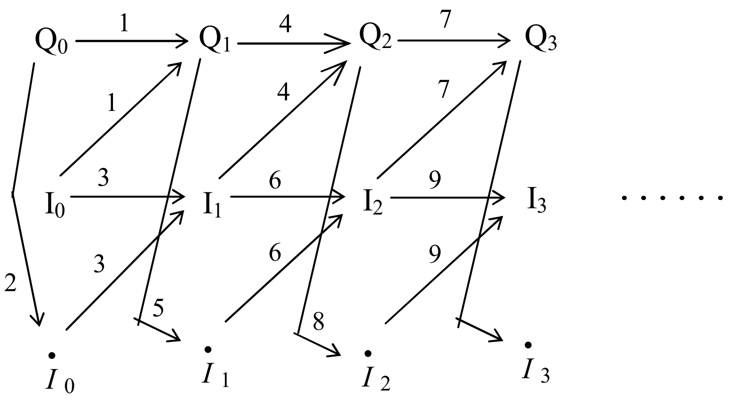
4) Die Stromstärke zum Zeitpunkt t_{n+1} (nach n+1 Zeitabschnitten), kann mit folgender Formel nicht exakt berechnet, sondern nur **angenähert** werden, da die Stromstärkenänderung $\dot{I}(t)$ während des Zeitraums Δt nicht konstant ist. Damit man aber eine gute Annäherung erreichen kann, muß man den Zeitraum Δt hinreichend klein wählen.

$\mathbf{I_{n+1} \approx I_n +} \dot{I}_{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{\Delta t}$ (S4)

5) Die Ladungsmenge, die sich zum Zeitpunkt t_{n+1} (nach n+1 Zeitabschnitten) auf dem Kondensator befindet, kann mit folgender Formel nicht exakt berechnet, sondern nur **angenähert** werden, da der Strom I während des Zeitraums Δt nicht konstant ist. Damit man aber eine gute Annäherung erreichen kann, muß man den Zeitraum Δt hinreichend klein wählen.

$\mathbf{Q_{n+1} \approx Q_n - I_n \cdot \Delta t}$ (S5)

Mit diesen 5 Formeln kann man die Stromstärke nach **jedem** Zeitraum Δt berechnen:



Konkretes Beispiel:
Voraussetzungen: G = 200V; L = 1Vs/A; C = 10F; Δt = 1 s

n	t_n	$Q(t_n)$	$I(t_n)$	$\dot{I}_1(t_n)$
0	0 · 1s = 0s	200V · 10F = 2000C	0A	2000C / 10F · 1VS/A = 200A/s
1	1 · 1s = 1s	2000C - 0A · 1s = 2000C	0A + 200A/s · 1s = 200A	2000C / 10F · 1VS/A = 200A/s
2	2 · 1s = 2s	2000C - 200A · 1s = 1800C	200A + 200A/s · 1s = 400A	1800C / 10F · 1VS/A = 180A/s
...				

Umsetzung in Excel

a) Geben Sie für L, C, G und Δt die von Ihnen bestimmten (z.B. G = 2V; L = 0,01Vs/A; C = 1F; Δt = 0,001 s) Werte in die von Ihnen vorgesehenen Zellen ein.

Erzeugen Sie die Wertetabelle für n, t_n, Q_n, I_n, und $\dot{I}_n$, in der die Zeit t_n (= n · Δt) nach n Zeitabschnitten, die Ladungsmenge Q_n, der Strom I_n, und die Stromstärkenänderung $\dot{I}_n$ am Kondensator in Abhängigkeit von 0, 1, 2, ... , n Zeitabschnitten dargestellt wird.

b) Der exakte Wert der Stromstärke I in Abhängigkeit von der Zeit t beträgt:

$$Iex(t) = -\frac{GC}{\sqrt{LC}} \cdot \sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)$$

Nehmen Sie den exakten Wert der Stromstärke Iex_n nach n Zeiteinheiten in die Wertetabelle mit auf.

c) Erzeugen Sie ein Diagramm, in dem I_n und Iex_n in Abhängigkeit von $t = t_n$ dargestellt wird.

Bemerkung:

Um 2 Perioden des Stromverlaufs anzuzeigen, muß man $\frac{4\pi\sqrt{LC}}{\Delta t}$ Einträge aus der Wertetabelle für das Diagramm benutzen.

d) Nehmen Sie noch die Spannung U_n und die exakte Spannung Uex_n am Kondensator (in Abhängigkeit von 0, 1, 2, ... , n Zeitabschnitten) in die Wertetabelle mit auf.

Bemerkung:
Der exakte Wert der Spannung U in Abhängigkeit von der Zeit t beträgt:

$$Uex(t) = G \cdot \cos(\frac{t}{\sqrt{LC}})$$

e) Erzeugen Sie ein Diagramm, in dem I_n und Iex_n, U_n und Uex_n in Abhängigkeit von $t = t_n$ dargestellt wird.

Bemerkung (für mathematisch Interessierte):

$$\mathbf{I_{n+1} \approx I_n + I_n \cdot \Delta t}$$

damit:

$$\mathbf{I_n \approx I_{n-1} + \dot{I}_{n-1} \cdot \Delta t} \qquad \text{(H1)}$$

$$\mathbf{\dot{I}_n = Q_n / LC} \qquad \text{(S1)}$$

damit:

$$\mathbf{\dot{I}_{n-1} = Q_{n-1} / LC} \qquad \text{(H2)}$$

(H2) in (H1) eingesetzt:

$$\mathbf{I_n \approx I_{n-1} + (Q_{n-1} / LC) \cdot \Delta t} \qquad \text{(H3)}$$

$\mathbf{I_n}$ in (S5) eingesetzt:

$$\mathbf{Q_{n+1} \approx Q_n - (I_{n-1} + (Q_{n-1} / LC) \cdot \Delta t) \cdot \Delta t}$$

Damit hat man folgende Gleichungen, mit denen man die Ladungsmenge Q nach 0, 1, 2, ... Zeitabschnitten **Δt** berechnen kann:

$$\mathbf{I_0 = 0}$$

$$\mathbf{Q_0 = GC}$$

$$\mathbf{Q_1 \approx Q_0 - I_0 \cdot \Delta t}$$

$$\mathbf{Q_{n+1} \approx Q_n - (I_{n-1} + (Q_{n-1} / LC) \cdot \Delta t) \cdot \Delta t} \qquad \textbf{für n>=1}$$

Excel-Tabelle

Elektrischer Schwingkreis (siehe zugehörige Aufgabe)

Konstanten:

Nur Werte in eingerahmte Zellen eingeben

Anfangsspannung am Kondensator:	G =	2	V
Induktivität der Spule	L =	0,01	Vs/A
Kapazität des Kondensators:	C =	1	F
Länge eines Zeitabschnitts	dt =	0,001	s

Anfangsbedingungen:

Anfangsladung am Kondensator	Q(0) =	2	C
Anfangsstrom	I(Q) =	0	A

Diagramm:

Anzahl der Einträge in der Wertetab.	N =	1256,64

Wertetabelle:

n	t_n	$Q_n = Q(t_n)$	$I_n = I(t_n)$	$I'_n = I'(t_n)$	$Iex_n = Iex(t_n)$	$U_n = U(t_n)$	$Uex_n = Uex(t_n)$
0	0	2	0	200	0	2	2
1	0,001	2	0,2	200	0,19999667	2	1,9999
2	0,002	1,9998	0,4	199,98	0,39997333	1,9998	1,99960001
3	0,003	1,9994	0,59998	199,94	0,59991	1,9994	1,99910007
4	0,004	1,9988	0,79992	199,88	0,79978668	1,9988	1,99840021
5	0,005	1,998	0,9998	199,8	0,99958339	1,998	1,99750052
6	0,006	1,997	1,1996	199,7	1,19928013	1,997	1,99640108
7	0,007	1,995801	1,3993	199,58	1,39885695	1,995801	1,995102
8	0,008	1,994401	1,59888	199,44	1,59829388	1,994401	1,99360341
9	0,009	1,992803	1,79832	199,28	1,79757098	1,992803	1,99190547
10	0,01	1,991004	1,9976	199,1	1,99666833	1,991004	1,99000833
11	0,011	1,989007	2,1967	198,901	2,19556602	1,989007	1,9879122
12	0,012	1,98681	2,3956	198,681	2,39424415	1,98681	1,98561727
13	0,013	1,984414	2,59428	198,441	2,59268285	1,984414	1,98312379
14	0,014	1,98182	2,79272	198,182	2,79086229	1,98182	1,98043199
15	0,015	1,979027	2,99091	197,903	2,98876265	1,979027	1,97754216
16	0,016	1,976036	3,18881	197,604	3,18636413	1,976036	1,97445457
17	0,017	1,972848	3,38641	197,285	3,38364698	1,972848	1,97116953
18	0,018	1,969461	3,5837	196,946	3,58059147	1,969461	1,96768739
19	0,019	1,965877	3,78064	196,588	3,7771779	1,965877	1,96400847
20	0,02	1,962097	3,97723	196,21	3,97338662	1,962097	1,96013316
21	0,021	1,95812	4,17344	195,812	4,169198	1,95812	1,95606183
22	0,022	1,953946	4,36925	195,395	4,36459246	1,953946	1,9517949
23	0,023	1,949577	4,56465	194,958	4,55955047	1,949577	1,94733279
24	0,024	1,945012	4,7596	194,501	4,75405253	1,945012	1,94267595
25	0,025	1,940253	4,95411	194,025	4,94807919	1,940253	1,93782484
26	0,026	1,935299	5,14813	193,53	5,14161104	1,935299	1,93277996
27	0,027	1,93015	5,34166	193,015	5,33462873	1,93015	1,92754179
28	0,028	1,924809	5,53468	192,481	5,52711297	1,924809	1,92211088

29	0,029	1,919274	5,72716	191,927	5,7190445	1,919274	1,91648775

Excel-Diagramm